Accademia Gioenia di Catania
Anno di fondazione 1824

Boll. Accad. Gioenia Nat. Sci. (Catania)
57 (388), FP41–FP57 (2024)
doi:10.35352/gioenia.v57i388.119

Tre algebristi all'Accademia Gioenia: Cipolla, Scorza, e Spampinato

Giovanna R. Giardina[1*] e Daniele C. Struppa[2†]

[1]*Dipartimento di Scienze Umanistiche, Università di Catania, Catania, Italy*

[2]*Donald Bren Presidential Chair in Mathematics, Chapman University, CA, USA*

Riassunto

L'articolo si occupa di tre famosi algebristi, soci dell'Accademia Gioenia e docenti dell'Ateneo di Catania, che nella prima metà del Novecento hanno inciso sul corso della ricerca matematica in Italia e all'estero, cioè Gaetano Scorza, Michele Cipolla e Nicolò Spampinato. Dopo avere descritto brevemente il fermento che animava la ricerca matematica catanese di questo gruppo di studiosi, nonché le linee della loro attività intellettuale, l'articolo si focalizza sulla nozione di infinito – il cui studio e dibattito all'interno dell'Accademia Gioenia collega gli autori ai tre suddetti algebristi – allo scopo di mostrare il contributo che la matematica catanese ha offerto alla nascente teoria delle algebre all'inizio del ventesimo secolo. In particolare, la questione dell'infinito nel caso di variabili reali esibisce la complessità e l'interesse degli studi di Spampinato sul medesimo problema nel caso delle variabili complesse: una prospettiva a partire dalla quale Spampinato approda allo studio dell'infinito per algebre a più unità arrivando a mostrare che nel campo di n variabili complesse si ottiene lo stesso infinito che si otterrebbe con il punto di vista proiettivo. Ciò collega le diverse modalità di infinito nel campo complesso e nel caso di algebra a più unità.

Parole chiave: Matematica; Algebra; Infinito; Variabili reali e complesse.

* E-mail: giardig@unict.it; Autrice corrispondente.

† E-mail: struppa@chapman.edu

Three algebraists at the Gioenia Academy: Cipolla, Scorza, and Spampinato

Summary

The article discusses three renowned algebraists -Gaetano Scorza, Michele Cipolla, and Nicolò Spampinato- who were members of the Gioenia Academy and professors at the University of Catania. In the first half of the twentieth century, they significantly influenced the course of mathematical research both in Italy and abroad. After briefly describing the intellectual fervor that animated mathematical research in Catania among this group of scholars, as well as the main lines of their work, the article focuses on the notion of infinity. The study and debate on this concept within the Gioenia Academy link the authors to the three aforementioned algebraists, demonstrating the contribution that Catania's mathematical community made to the emerging theory of algebras at the beginning of the twentieth century. In particular, the treatment of infinity in the context of real variables highlights the complexity and significance of Spampinato's studies on the same issue in the case of complex variables. From this perspective, Spampinato explores infinity in multi-unit algebras, eventually showing that in the field of n complex variables, the same notion of infinity is obtained as with the projective viewpoint. This approach connects the different conceptions of infinity in both the complex field and the multi-unit algebraic case.

Keywords: Mathematics; Algebra; Infinity; Real and complex variables.

1. Introduzione

Uno dei grandi meriti dell'Unità d'Italia, sulle cui luci e ombre esiste d'altronde una più che ampia letteratura, fu senz'altro quello di dare un grande impulso alle ricerche matematiche italiane, facendo leva sul fatto che la Stato unitario poteva contare su molti matematici di rilevante valore (cf. Martini, 2004). Un'area di particolare rilievo nel panorama della matematica del neonato Regno era l'algebra, il cui sviluppo in quegli anni è ben descritto in Martini (2004). Naturalmente, la parola 'algebra' è un contenitore assai ampio, ed al suo interno si trovano varie e distinte direttrici di ricerca. Quella a cui vogliamo fare riferimento in associazione ad alcuni studiosi di grande importanza che furono altresì illustri Soci dell'Accademia Gioenia, è quella dedicata allo studio delle cosiddette algebre reali.

Con questo termine, senza entrare in dettagli troppo specifici, ci si riferisce non solo all'algebra propria dei numeri reali, ma anche alle sue generalizzazioni riguardanti i numeri complessi, i quaternioni di Hamilton, i numeri bicomplessi di Corrado Segre, e cosí via.

2. Risultati

2.1. Le algebre reali a Catania: Cipolla e Scorza

Una figura centrale nello studio di queste algebre fu appunto quello che viene giustamente considerato uno dei massimi algebristi dei primi anni del secolo scorso, cioè Bernardino Gaetano Scorza (Fig. 1).

Fig. 1. Bernardino Gaetano Scorza.

Nato a Morano Calabro, in provincia di Cosenza, il 29 settembre del 1876, figlio di un proprietario terriero, Giuseppe Scorza, e di sua moglie, Sofonisba Capalbi, lo Scorza studiò a Roma e a Firenze, prima di laurearsi a Pisa nel 1899. Come usava in quegli anni, Scorza iniziò la sua carriera nel 1902 presso le scuole medie di Terni, Bari e Palermo, dove nel 1907 conseguí la libera docenza in geometria proiettiva e descrittiva. Dopo vari trasferimenti, finalmente occupò la cattedra di Geometria analitica e proiettiva all'Università di Catania dal 1916 al

1921, prima di trasferirsi a Napoli e poi di concludere la sua carriera universitaria a Roma. Fu in quegli anni che divenne Socio dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali di Catania, e precisamente Socio Effettivo con nomina del 30 novembre 1916. Oltre tutto, ricoprì la carica di Segretario Generale dell'Accademia dal 1919 al 1922 (Monterosso, 1962), cioè fin quando diede le dimissioni per via del suo spostamento a Napoli. Una bella analisi sull'impegno culturale più ampio di Scorza si può trovare in Maierù (1990). Si vedano invece (O'Connor *et al.*, 2013) e (Rogora, 2018) per ulteriori dettagli sulla sua vita, mentre più in generale si può consultare (Marino, 2013) per una panoramica storica sulle cattedre di matematica presso l'Università di Catania.

Negli anni dell'insegnamento catanese Scorza ebbe modo di incontrare personalmente un altro grande algebrista italiano: Michele Cipolla (Fig. 2). Quest'ultimo era nato a Palermo il 28 ottobre 1880 e, dopo avere insegnato per sette anni in un Ginnasio di Corleone, era poi giunto a Catania nel 1911, ricoprendo la cattedra di analisi algebrica. Come Scorza, egli pure fu socio dell'Accademia Gioenia. Nominato Socio effettivo della Sezione di Scienze Fisiche e Matematiche con nomina del 9 marzo 1912 e poi Bibliotecario dal 1920 al 1922. Quando Scorza lasciò la carica di Segretario Generale fu proprio Cipolla a ricoprire quella stessa carica dal 1922 al 1923. Spostatosi a Palermo, divenne quindi Socio Corrispondente, dal dicembre 1924 fino al 1947 (Monterosso, 1962). Si veda (O'Connor *et al.*, 2009) per ulteriori dettagli sulla sua vita.

Fig. 2. Michele Cipolla.

Nei suoi primi anni di attività Cipolla si occupò per lo più di Teoria dei Numeri (su cui aveva già lavorato per conseguire la laurea sotto la supervisione di Gabriele Torelli). Molti risultati delle sue ricerche si tradussero in importanti contributi pubblicati negli *Atti dell'Accademia Gioenia* (Cipolla 1913, 1914, 1917a, 1917b, 1918, 1919-20). Cipolla si occupò altresì dei problemi posti dalla teoria degli insiemi di Zermelo, che volle modificare in (Cipolla, 1913) utilizzando il concetto di limite di successione di insiemi (Spagnolo, 1998). Il suo lavoro in questa direzione non ebbe grandi riscontri, ma rappresenta senz'altro una pagina importante della storia della ricerca matematica, come viene esplicitamente osservato in (Moore, 1982).

È forse nel campo della Teoria dei Gruppi, tuttavia, che Cipolla segnò il suo maggiore impatto. In effetti, egli tenne, negli anni 1920-21 e 1921-22, degli importanti corsi di Teoria dei Gruppi e di Teoria di Galois, studiando in particolare come la nozione di sottogruppo fondamentale possa essere utilizzata per la classificazione dei gruppi finiti. Il suo lavoro più importante di quegli anni, in tre volumi, *Teoria dei gruppi di ordine finito e sue applicazioni* (Cipolla, 1921-23), raccoglieva i risultati di una serie di lavori pubblicati nei "Rendiconti della Accademia delle Scienze di Napoli" (Bartolozzi, 1998).

Tali lavori influenzarono non poco Scorza, che infatti estese la teoria di Cipolla al caso dei gruppi infiniti, anche se queste ricerche furono purtroppo pubblicate solo postume in (Scorza, 1942). Durante il periodo trascorso a Catania, Scorza intraprese forse il più importante dei suoi studi, quello sui corpi numerici e le algebre (non necessariamente reali). Il testo, che apparve quando ancora era a Catania, si intitola appunto *Corpi numerici ed algebre* (Scorza, 1921a). In questo lavoro, lo Scorza presenta una teoria generale di quelli che egli chiama 'corpi numerici' (e che oggi chiameremmo campi). Il suo lavoro acquisisce importanza internazionale e viene ripreso da Leonard E. Dickson nel suo importante trattato *Algebras and their Arithmetics* (Dickson, 1923).

Scorza scrisse poi varie memorie che utilizzavano la teoria generale che egli aveva espresso nel volume del 1921b, ed in tali memorie spesso fa riferimento ai collaboratori della sua scuola e ai loro contributi alla sua ricerca. Senza voler essere esaustivi, vale la pena di ricordare (Scorza, 1922) dove studia le algebre doppie, (Scorza, 1935a) dove classifica le algebre del terz'ordine, (Scorza, 1935b) dove classifica quelle del quart'ordine, ed infine la sua presentazione al primo congresso della Unione Matematica Italiana (Scorza, 1937) dove, invitato dal grande Giovanni Sansone (1888-1979), offre una panoramica sullo studio delle algebre.

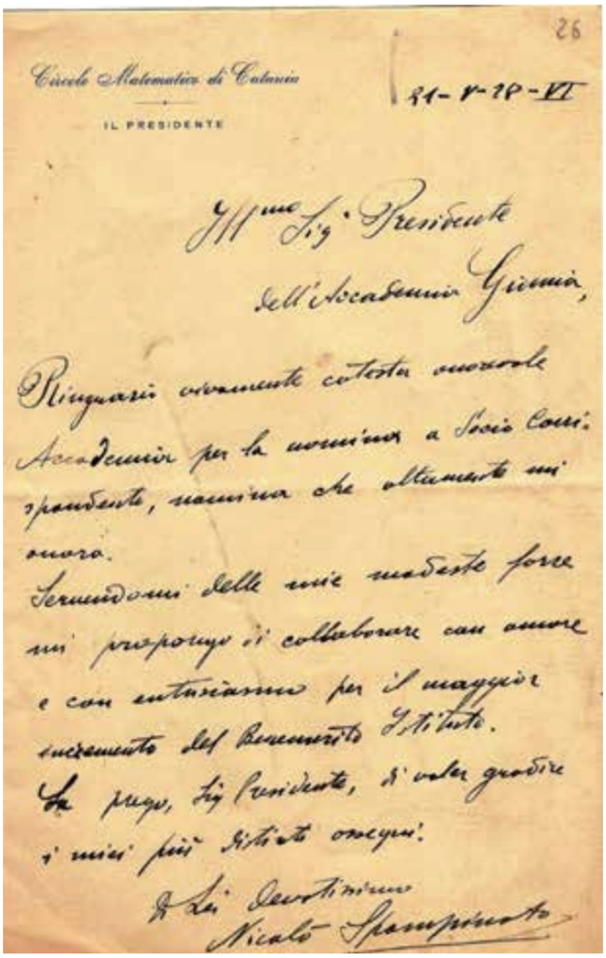
2.2. Spampinato ed il Circolo Matematico di Catania

La presenza di Scorza e di Cipolla a Catania rese tale Ateneo un vero centro di studi per le questioni algebriche che andavano assumendo un interesse sempre maggiore. Come osservato in (Martini, 2004), Scorza divenne un punto di riferimento per vari studiosi, tra i quali spiccano in particolare Giuseppe Fichera (1895-1952, padre del grande analista Gaetano Fichera), e Nicolò Spampinato (1892-1971).

Nicolò Spampinato nacque ad Adernò, un piccolo paese in provincia di Catania, nel 1892. Si laureò in matematica all'Università di Catania nel 1919, dove poi divenne Ordinario di Geometria analitica e proiettiva dal 1928.

Come leggiamo in Nastasi (2004) ed in Nastasi (2020), Spampinato fu un giovane pieno di energie che, insieme a Giuseppe Fichera ed a Giorgio Aprile (1884-?, nativo di Modica, e che fu libero docente di Geometria analitica e proiettiva a Catania a partire dal 1922, dove però non ebbe mai una cattedra), fu uno dei fondatori del Circolo Matematico di Catania (Scimone, 1989), ispirato probabilmente dal più famoso Circolo Matematico di Palermo e inaugurato formalmente il 30 gennaio 1921, con una prolusione inaugurale di Scorza dal titolo "Essenza e valore della matematica" (Scorza, 1962), ed un discorso di Spampinato stesso, che del Circolo fu il primo Presidente.

Sappiamo che Spampinato ricopriva ancora quella carica quando, nel 1928, fu nominato Socio corrispondente dell'Accademia Gioenia (Monterosso, 1962), perché la sua lettera di ringraziamento è appunto scritta sulla carta intestata del Presidente del Circolo (Fig. 3).



Circolo Matematico di Catania
IL PRESIDENTE

26

21-V-28-VI

Ill.mo Sig. Presidente
dell'Accademia Gioenia,

Ringrazio vivamente codesta onorevole Accademia per la nomina a Socio Corrispondente, nomina che altamente mi onora.
Servendomi delle mie modeste forze mi propongo di collaborare con amore e con entusiasmo per il maggior incremento del Benemerito Istituto.
La prego, Sig. Presidente, di voler gradire i miei più distinti ossequi.

Di Lei Devotissimo
Nicolò Spampinato

Fig. 3. Lettera di ringraziamento di Nicolò Spampinato.

Le attività del Circolo trovarono subito espressione in due riviste: la prima, *Note e Memorie di Matematica*, dedicata ad articoli scientifici originali e diretta dallo stesso Scorza; la seconda, di cui fu direttore Cipolla, cioè *Esercitazioni matematiche*, dedicata agli insegnanti di scuola media superiore e agli studenti universitari (Micale, 1992). Nastasi (in Nastasi, 2020) osserva che fu proprio questa seconda rivista a meglio esprimere l'obiettivo centrale del Circolo matematico di Catania, e cioè la formazione degli insegnanti e la diffusione della matematica tra i giovani, e non *Note e Memorie di Matematica*, la quale si proponeva, come già altre riviste scientifiche, di pubblicare i risultati della ricerca pura. Era questo, per esempio, l'obiettivo del Circolo di Palermo, che non si occupò mai di fare divulgazione della matematica.

Ritornando a Spampinato, abbiamo citato in precedenza alcuni dei lavori di Scorza. È in particolare utile ritornare a (Scorza, 1935a), dove, nell'*Introduzione*, il matematico fa riferimento diretto ai lavori di Spampinato sulle algebre di terzo ordine. Leggiamo direttamente da Scorza (in Scorza, 1935a): "Nell'anno accademico 1922-23, in accordo con un programma di studii che mi ero proposto di promuovere… indicai ad una mia allieva, come tema della tesi di laurea, la classificazione… delle algebre del 3º ordine… La ricerca non fu allora portata a termine, né, per ragioni varie, ebbi più occasione di interessarmi allo svolgimento di quel programma. Indotto a riprenderlo in esame per taluni studi o miei o che vengono compiendo il prof. SPAMPINATO ed i suoi allievi…".

Scorza non specifica quali siano gli studi che Spampinato avrebbe compiuto, ma sappiamo che in quegli anni quest'ultimo si occupava, grosso modo, di tre questioni. La prima, ispirata da (Scorza 1921b), legata alle matrici di Riemann (Spampinato, 1929, 1930a, 1930b, 1932), la seconda legata all'estensione di una nozione di derivabilità ed analiticità per funzioni definite su algebre reali (Spampinato, 1935a, 1935b, 1935d, 1935e), tema su cui poi ritornerà in Spampinato (1936, 1940, 1949), ed infine una terza su come si possa definire una nozione di infinito su spazi di queste algebre (Spampinato, 1935c, 1938). È quindi assai probabile che l'interesse di Scorza per i lavori di Spampinato si riferisca proprio alla teoria che quest'ultimo stava sviluppando per lo studio di funzioni definite su queste algebre.

Tale teoria intendeva studiare in quale modo le idee che tanto feconde erano state per lo studio delle funzioni olomorfe di variabile complessa potessero essere estese al caso di funzioni definite su variabili in algebre più generali. Non è questo il luogo per entrare nei dettagli, ma si dovrebbe almeno osservare che questo ambito aveva già sollecitato l'interesse di altri matematici italiani come Corrado Segre, cui si deve l'introduzione, dopo quella dei quaternioni dovuta ad Hamilton (1805-1865), di un'importante algebra, e cioè quella dei numeri bicomplessi, oggi di nuovo oggetto di studio (Segre, 1892; Cerroni, 2017; Panza *et al.*, 2024b), o come Sobrero, che in Sobrero (1935), studia le funzioni definite su una delle algebre studiate da Scorza (in Scorza, 1935b), e precisamente l'algebra 79, o meglio LXXIX come Scorza scrive, e mostra come essa si possa utilizzare per studiare le equazioni dell'elasticità. Si veda a questo proposito una trattazione moderna in (Sabadini *et al.*, 2021).

3. Discussioni e conclusioni

3.1. Spampinato e lo studio dell'infinito

La definizione della nozione di infinito che impegnò Spampinato a più riprese (Spampinato, 1935c, 1938) ci induce a focalizzare questo tema, caro anche agli autori (Giardina *et al.*, 2023) e che è stato recentemente occasione di discussione presso l'Accademia Gioenia. Come osservammo in Giardina *et al.* (2023), i matematici hanno spesso tentato in più modi di catturare il concetto di infinito con strumenti rigorosi che ne possano permettere l'utilizzo. Questi tentativi sono stati a volte di successo, a volte meno, e nell'articolo sopra citato abbiamo brevemente analizzato quattro possibili modi di trattare l'infinito, quello della geometria proiettiva, quello dell'analisi infinitesimale, quello della teoria degli insiemi di Zermelo-Frankel, e quello della teoria della misura.

Ci sono però alcune situazioni imposte dallo studio della geometria che si aggiungono a questi quattro esempi, ed esse sono state trattate da vari matematici nel corso del Novecento, tra i quali dobbiamo ricordare Fantappié (si veda Fantappié, 1931) ed anche Struppa (in Struppa, 1987), e poi Severi, il cui lavoro (Severi, 1931-32) è citato dallo stesso Spampinato (in Spampinato, 1935c). Vediamo di descrivere brevemente il problema, considerando una situazione semplificata, in cui ci troviamo a dover descrivere cosa significhi dare una nozione di infinito al piano reale.

Iniziamo con la retta reale. Il modo classico di introdurre un infinito su questa retta, come discusso in (Giardina *et al.*, 2023), consiste nel considerare un cerchio, di raggio unitario per comodità, centrato nell'origine dell'asse reale (Fig. 4). Chiamiamo N il polo nord, per cosí dire, del cerchio, cioè il punto di coordinate (0,1). Ora, osserviamo che ogni punto della retta può essere collegato con N da un segmento che interseca il cerchio in un punto. Per esempio (guardando il disegno qui sotto), il punto di coordinata 2 sull'asse reale interseca il cerchio nel punto P, mentre il punto di coordinata -0,25 sull'asse reale interseca il cerchio nel punto Q. Si ha, quindi, una corrispondenza biunivoca tra i punti dell'asse reale e quelli del cerchio, escluso il punto N, che non può essere mai visto come intersezione di un segmento che ha una estremità sull'asse reale. Si intuisce, però, che se il punto sulla retta reale si allontana sempre più dall'origine (andando, per cosí dire, verso l'infinito), allora il punto che gli corrisponde sul cerchio si avvicina sempre più ad N, e pertanto si dice che il cerchio rappresenta la retta reale con l'aggiunta del punto all'infinito N. Quindi, l'infinito di una retta reale è dato da un punto solo, e la retta con l'aggiunta dell'infinito è equivalente ad un cerchio.

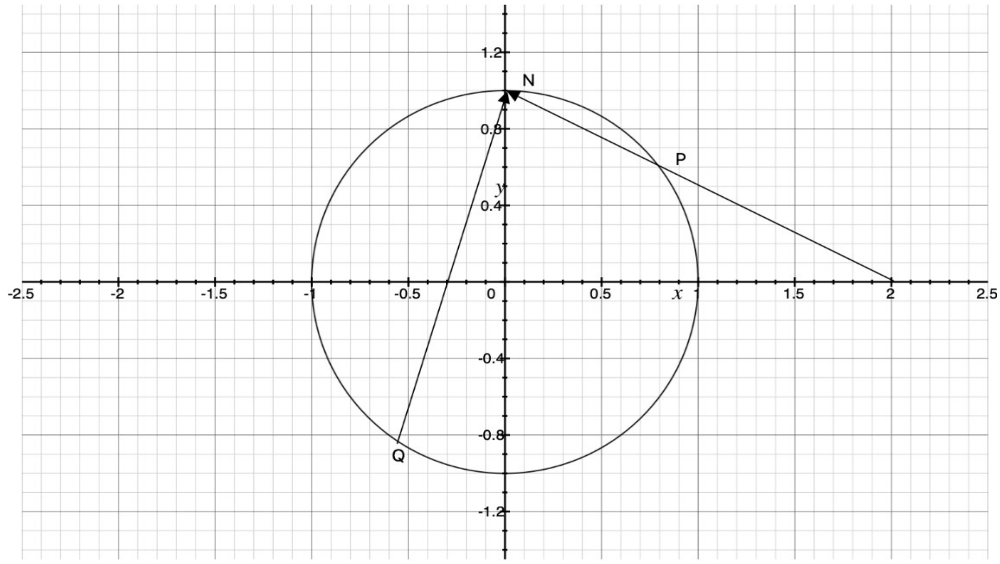


Fig. 4. "Compattificazione" della retta reale, da Giardina *et al.* (2023).

Questo è quanto abbiamo anche detto in (Giardina *et al.*, 2023) e che viene descritto in maniera più completa in (Panza *et al.*, 2024a). I matematici chiamano questo processo la "compattificazione ad un punto" di uno spazio. Il nome è chiaramente derivato dal fatto che abbiamo preso la retta e le abbiamo sostanzialmente aggiunto un punto. Questo nuovo oggetto viene spesso chiamato la retta proiettiva, ed indicato con P^1 (l'esponente uno indica che si tratta di un oggetto ad una dimensione, e la P si riferisce al fatto che è una retta proiettiva), o anche come S^1 (qui il numero uno si riferisce ancora alla dimensione, e la S indica che si tratta di una sfera uni-dimensionale, cioè un cerchio).

Fino a qui nulla che presenti aspetti sofisticati. Ma pensiamo adesso a come fare per determinare una nozione di infinito sul piano, inteso come il prodotto cartesiano di due rette (visto che ogni punto del piano può essere visto come una coppia di numeri reali). Ecco che ci troviamo di fronte ad almeno tre punti di vista differenti.

Il primo, e il più semplice, consiste nel replicare il processo che abbiamo appena descritto per la retta. Questa volta, invece di usare un cerchio centrato nell’origine, useremo una sfera centrata nell’origine. Lo stesso processo descritto sopra mostra l’esistenza di una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e quelli della sfera, con l’eccezione del polo nord della sfera, che quindi viene usato per rappresentare il punto all’infinito del piano. Ecco quindi la compattificazione ad un punto del piano, identificata appunto con una sfera. Da questo punto di vista l’infinito del piano è un punto solo, e la compattificazione viene di solito indicata con S^2, dove il numero due corrisponde alla dimensione, e di nuovo la S indica la sfera, questa volta bidimensionale.

Un secondo approccio è quello che abbiamo descritto in Giardina *et al.* (2023) e consiste nell’introdurre il piano proiettivo, cioè il piano a cui si aggiunge una retta di punti all’infinito, ognuno dei quali corrisponde al punto all’infinito di una retta e di tutte quelle ad essa parallela. Non vale qui la pena di entrare nei dettagli, se non per ricordare appunto che ora ci sono infiniti punti all’infinito, che giacciono su quella che si chiama retta impropria. Da un punto di vista topologico, il piano proiettivo reale è una superficie (come la sfera) ma non orientabile, e viene usualmente indicato con P^2.

Un terzo punto di vista consisterebbe nel pensare all’infinito nel caso di due variabili, come il prodotto cartesiano di due variabili ognuna delle quali può assumere il valore infinito. In questo terzo caso lo spazio che descrive il piano con punti infiniti aggiunti sarebbe il prodotto cartesiano S^1xS^1, che (lasciamo al lettore la verifica) non è altro che una ciambella, come illustrato in Fig. 5 con una immagine prodotta utilizzando il software *grapher.*

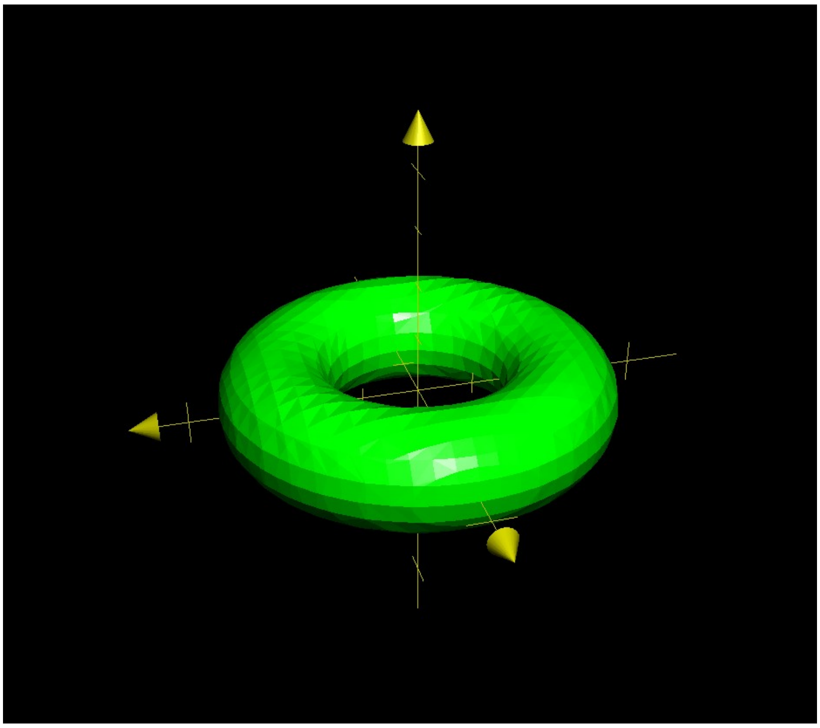


Fig. 5. Rappresentazione dell'infinito nel caso di due variabili.

Vediamo allora come, anche nel caso semplice di variabili reali, il passaggio da una a più variabili presenta al matematico vari possibili modi di considerare il concetto di infinito. La cosa naturalmente è assai più delicata quando si passa a variabili complesse, ed è di questo che Spampinato si occupa, seguendo appunto le indicazioni di Severi.

Prendendo spunto da Sever (1931-32), Spampinato (in Spampinato, 1935c e 1938) distingue, dunque, l'infinito introdotto secondo quello che egli chiama il punto di vista proiettivo, e quello che chiama il punto di visto quadratico (e che Severi, rifacendosi ad Osgood, chiama invece il punto di vista dell'analisi). Spingendosi oltre, Spampinato introduce poi la nozione di infinito per algebre a più unità, e conclude mostrando che, se si estende l'approccio usuale nel caso dell'introduzione dell'infinito al campo dei numeri complessi (la cosiddetta sfera di Riemann), e lo si applica al caso di una variabile in un'algebra complessa ad n unità, si ottiene proprio lo stesso infinito nel campo di n variabili complesse che si otterrebbe con il punto di vista proiettivo. È questo un risultato degno di nota, e che collega in maniera interessante le diverse modalità di infinito nel campo complesso e nel caso di algebra a più unità.

Potremmo naturalmente continuare con una analisi ancora più dettagliata dei lavori di Spampinato, Cipolla, Scorza, ma quanto volevamo mostrare, nell'onorare questi matematici che tanto lustro hanno dato alla Accademia Gioenia, è il ruolo non indifferente che la matematica siciliana, ed in questo caso catanese, ha offerto alla nascente teoria delle algebre all'inizio del ventesimo secolo. Non è forse un caso che questa teoria sia poi stata ripresa da molti altri matematici italiani, naturalmente all'interno di un contesto nel quale la matematica ha assunto una fisionomia sempre più internazionale.

Bibliografia

Bartolozzi F. 1998. *L'Opera matematica di Michele Cipolla con particolare riguardo alla Teoria dei Gruppi*, in *Michele Cipolla (1880-1947), la figura e l'opera.* Convegno celebrativo nel cinquantenario della morte, Palermo, 8 settembre 1997, Atti dei Convegno dell'A.I.C.M., Palermo 1998.

Cerroni C. 2017. From the theory of "congeneric surd equations" to "Segre's bicomplex numbers", *Hist. Math*. 44 (3), 232-251.

Cipolla M. 1913. Sul postulato di Zermelo e la teoria dei limiti delle funzioni, *Atti dell'Accademia Gioenia*, s. 5, t. VI (1913) Memoria 5, 1-13.

Cipolla M. 1914. Le sostituzioni ortogonali non cayleyane, *Atti dell'Accademia Gioenia*, s. 5, t. VII (1914) Memoria 2, 1-18.

Cipolla M. 1917a. Il discriminante e il numero delle radici immaginarie di un'equazione algebrica a coefficienti reali, *Atti dell'Accademia Gioenia*, s. 5, t. X (1917) Memoria 13, 1-23.

Cipolla M. 1917b. Sulla determinazione della base canonica di un ideale in un corpo quadratico, *Atti dell'Accademia Gioenia*, s. 5, t. X (1917) Memoria 20, 1-11.

Cipolla M. 1918. I triangoli di Fermat e un problema di Torricelli, *Atti dell'Accademia Gioenia*, s. 5, t. XI (1918) Memoria 11, 1-47.

Cipolla M. 1919-20. Sulla risoluzione in numeri dell'equazione $x^2 = 8y^4 + z^4$, *Atti dell'Accademia Gioenia*, s. 5, t. XII (1919-20) Memoria 1, 1-7.

Cipolla M. 1921-23. *Teoria dei gruppi di ordine finito e sue applicazioni*, Edizioni Circolo Matematico di Catania, Catania, 1921-1923, vol. I, 259, vol. II, 101, vol. III, 187.

Dickson L.E. 1923. *Algebras and their Arithmetics,* The University of Chicago Press, Chicago, VII-XII, 1-241.

Fantappié L. 1931. I funzionali delle funzioni di due variabili, *Mem. Reale Acc. d'Italia, Classe di Scienze Fisiche, matematiche e naturali*, vol. II, 191-355.

Giardina G.R., M. Panza, D.C. Struppa 2023. Many infinities, or only one? *Boll. Accademia Gioenia di Scienze Naturali*, 56 (386), 28-41.

Maierù L. 1990. Bernardino Gaetano Scorza fra scienza e sapienza, nel 2° Annuario del Liceo Scientifico Statale B.G. Scorza, Calabria Letteraria Editrice, Cosenza, 1990, 14-26.

Marino M. 2013. Breve storia delle cattedre di Analisi matematica dell'Università di Catania nei 150 anni dell'Italia Unitaria, *Boll. Accademia Gioenia di Scienze Naturali*, Catania, 46 (376), 91-105.

Martini L. 2004. Algebraic research schools in Italy at the turn of the twentieth century: the cases of Rome, Palermo, and Pisa, *Historia Mathematica* 31, 296-309.

Micale B. 1992. *Esercitazioni Matematiche: una rivista ad uso degli studenti universitari*, «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate», 15, 575-587.

Moore G.H. 1982. *Zermelo's Axiom of Choice (Its Origins, Development, and Influence)*, Springer-Verlag, New York, I-XIV, 1-411.

Monterosso B. 1962. *Bollettino delle Sedute della Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania*, s. IV, t. VI, fascicoli 9 e 10: *Cariche, Gradi e Soci dell'Accademia Gioenia dalla fondazione al 1960*, Catania.

P. Nastasi 2004. *Il Circolo matematico di Palermo e quello di Catania: la primavera della matematica in Sicilia fra Ottocento e Novecento*, in AA.VV., *Personaggi e istituzioni scientifiche nel mezzogiorno dall'Unità d'Italia ad oggi*, *Accademia Nazionale dei XL,* 191-209.

Nastasi P. 2020. *Le scuole di Matematica nel Sud d'Italia dall'Unità alla Repubblica. La matematica all'università di Catania*, https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/09/Le-scuole-di-Matematica.pdf

O'Connor J.J. e Robertson E.F. 2009. *Michele Cipolla*, MacTutor, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cipolla/ ultimo aggiornamento Luglio 2009.

O'Connor J.J. e Robertson E.F. 2013. *Bernardino Gaetano Scorza*, MacTutor, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Scorza/ ultimo aggiornamento Maggio 2013.

Panza, M. e Struppa D.C. 2024a. *Three Infinities, Undergraduate Texts in Mathematics*, Springer, (in stampa).

Panza M. e Struppa D.C. 2024b. *Notes on the origins of bicomplex numbers: James Cockle*, preprint.

Rogora E. 2018. *Scorza, Bernardino Gaetano*, In: *Dizionario Biografico degli Italiani*, vol. 91, Istituto della Enciclopedia Italiana, Roma, 306–307.

Sabadini I. e Struppa D.C. 2021. Total differentiability and monogenicity for functions in algebras of order 4, *Compl. An. Oper. Theory*, 15-26.

Scimone A. 1989. Il circolo matematico di Catania, *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche* 9, 171-191.

Scorza G. 1921a. *Corpi numerici e algebre*, Principato, Messina, 3-462.

Scorza G. 1921b. Le algebre di ordine qualunque e le matrici di Riemann, *Rend. del Circolo Matematico di Palermo*, 45.

Scorza G. 1922. Le algebre doppie, *Rend. Reale Accad. di Scienze Fisiche e Mat. di Napoli*, (3) 28, 65-79.

Scorza G. 1929. Sulle matrici di Riemann, *Rend. Reale Accad. dei Lincei*, (6) 9, 253-258.

Scorza G. 1935a. Le algebre del 3° ordine, *Atti della R. Accademia di Napoli* (2) 20, n. 13, 1-14.

Scorza G. 1935b. Le algebre del 4° ordine, *Mem. Reale Acc. di Scienze Fisiche e Mat. di Napoli* (2) 20, n. 14, 1-83.

Scorza G. 1937. La teoria delle algebre e le sue applicazioni, *Atti 1º Congresso dell'Unione Matematica Italiana*, 40-57.

Scorza G. 1942. *Gruppi Astratti*, Edizioni Cremonese, Roma.

Scorza G. 1962. *Opere scelte a cura dell'U.M.I*, Roma, 3 voll.

Segre C. 1892. Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici, *Math. Ann*. 40, 413-467.

Severi F. 1931-32. Risultati, vedute e problemi nella teoria delle funzioni analitiche di due variabili complesse, *Rend. Sem. Mat. Roma*, p. II (1931-32), Memorie; 1-58.

Sobrero L. 1935. Algebra delle funzioni ipercomplesse e una sua applicazione alla teoria matematica dell'elasticità. *Mem. R. Acc. d'Italia* 6, 1-64.

Spagnolo F. 1998. *I lavori di Michele Cipolla sull'assioma di Zermelo*, in *Michele Cipolla (1880-1947), la figura e l'opera.* Convegno celebrativo nel cinquantenario della morte, Palermo, 8 settembre 1997, Atti dei Convegno dell'A.I.C.M., Palermo.

Spampinato N. 1929. Il teorema di esistenza per le funzioni abeliane e le matrici di Riemann fondamentali, *Atti dell'Accademia Gioenia*, s. 5, t. XVI (1929), Memoria 5 bis, 1-14.

Spampinato N. 1930a. Le matrici di Riemann aventi una data forma riemanniana principale, *Atti dell'Accademia Gioenia*, s. 5, t. XVII (1930), Memoria 9, 1-28.

Spampinato N. 1930b. Costruzione di una classe di matrici di Riemann di genere P e dei nove tipi di matrici del genere, *Atti dell'Accademia Gioenia*, s. 5, t. XVII (1930), Memoria 13, 1-32.

Spampinato N. 1932. Sulla classificazione delle matrici di Riemann di dato genere, *Atti dell'Accademia Gioenia*, s. 5, t. XVIII (1932), Memoria 16, 1-9.

Spampinato N. 1935a. Sulle funzioni totalmente derivabili in un'algebra reale o complessa dotata di modulo, *Rend. Lincei* 21, 621-625.

Spampinato N. 1935b. Sulla rappresentazione delle funzioni di variabile bicomplessa totalmente derivabili, *Ann. Mat. Pura Appl*. 14, no. 1, 305-325.

Spampinato N. 1935c. Sull'introduzione dell'infinito nel campo di due o più variabili complesse, *Bollettino dell'Accademia Gioenia*, s. 2, f. 67, 80-86.

Spampinato N. 1935d. I gruppi di affinità e di trasformazioni quadratiche piane legati alle due algebre complesse doppie, dotate di modulo, *Bollettino dell'Accademia Gioenia,* s. 2, f. 68 (1935), 21-25.

Spampinato N. 1935e. Sulle omografie vettoriali legate ad un'algebra reale o complessa, *Bollettino dell'Accademia Gioenia*, s. 2, f. 68 (1935), 26-32.

Spampinato N. 1936. Sulla rappresentazione delle funzioni di variabile bicomplessa totalmente derivabili, *Ann. Mat. Pura ed Appl*. XIV (1936), 305-325.

Spampinato N. 1938. Sulla geometria dell'Sr biduale proiettivo, *Mem. Della R. Accademia Nazionale dei Lincei,* s. VI, vol. VII, f. IV (1938), 239-296.

Spampinato N. 1940. *Il teorema fondamentale dell'algebra per una qualunque algebra complessa dotata di modulo*, in *Atti Secondo Congresso Unione Matematica Italiana*, Bologna, 96-104, II ed. Roma 1942.

Spampinato N. 1949. *Fondamenti di geometria moderna in un'algebra doppia*, Napoli.

Struppa D.C. 1987. *L. Fantappié e la teoria dei funzionali analitici*, in *La matematica italiana tra le due guerre mondiali*, a cura di A. Guerraggio, Pitagora, Bologna, 393-429.