Boll. Accademia Gioenia di Scienze Naturali - Catania

BOLLAG Vol. 49, N. 378 (2016)
Opening Lectures, pp. OL1 - OL26
ISSN 0393-7143

Anno di fondazione 1824

A Giuseppe che non c'è più,
medico veterinario
con l'animo d'artista

Il Calcolo delle Variazioni una teoria matematica in continua evoluzione†

Mario Marino [1]*

[1] Socio effettivo dell'Accademia Gioenia di Catania

Summary

We give a short history of the mathematical theory of the Calculus of variations. After the illustration of isoperimetric, geodetic and brachystochrone problems, we expound the method of Lagrange variations, which leads to Eulero-Lagrange fundamental equation. We provide then a brief glance at the direct method and regularity of the solutions of problems in Calculus of variations. This work also contains some brief biographical notes on mathematicians who have contributed to the development of the Calculus of variations.

Key words: *Calculus of variations, History*

Riassunto

Si traccia una breve storia della teoria matematica del Calcolo delle variazioni. Dopo aver illustrato i problemi classici degli isoperimetri, delle geodetiche e della brachistocrona, viene esposto il metodo delle variazioni di Lagrange, che conduce all'equazione fondamentale di Eulero-Lagrange. Viene dato poi un fugace sguardo al metodo diretto ed alla regolarità delle soluzioni dei problemi del Calcolo delle variazioni. Brevi notizie storiche su matematici che hanno contribuito allo sviluppo del Calcolo delle variazioni vengono anche fornite.

Parole chiave: *Calcolo delle variazioni, Storia*

†Conferenza tenuta il 22 gennaio 2016 nell'Aula Magna del Palazzo centrale dell'Università di Catania, in occasione dell'Inaugurazione del CXCIII anno accademico dell'Accademia Gioenia di Catania.

*e-mail: mmarino@dmi.unict.it

1 Il problema isoperimetrico.

Il *Calcolo delle variazioni* [1] è un'importante branca dell'*Analisi matematica*. La sua nascita è strettamente legata a quella del *calcolo infinitesimale*, che, dopo la geometria euclidea, è la più grande creazione di tutta la matematica. Il calcolo infinitesimale, come è noto, nasce sul finire del XVII secolo ad opera dei due colossi della matematica (ma anche della fisica e della filosofia) Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Non ci interessa in questa sede disquisire sull'aspra disputa tra i sostenitori dei due scienziati in merito all'indipendenza e priorità della scoperta, ci preme piuttosto sottolineare come i nuovi metodi fossero adatti a risolvere con estrema facilità la stragrande maggioranza dei problemi posti nel corso dei secoli dalla fisica, dall'astronomia, dalla geometria, ivi inclusi quelli di quello che in seguito verrà chiamato CdV. La vastità delle applicazioni e l'adattabilità del Calcolo infinitesimale alle più svariate questioni creò tra i matematici del Settecento un tale entusiasmo per questa "nuova matematica" da battezzarla *Matematica sublime*.
Gli "antenati" degli attuali colleghi di Analisi matematica furono un tempo i docenti di Matematica sublime. Fu professore di Matematica sublime presso il nostro Ateneo Giuseppe Zurria (1810-1896), che fu anche preside della Facoltà di Scienze matematiche, fisiche e naturali e rettore dal 1862 al 1869. Un busto in marmo collocato nel viale degli Uomini Illustri della Villa Bellini ed una lapide commemorativa murata nell'ala sud del porticato che cinge il cortile di questo Palazzo universitario ricordano ancora oggi questo illustre matematico.
Mauro Picone (1885-1977), che fu docente di Analisi matematica presso questa Università, prima, nel 1919, come professore incaricato e poi, dal 1921 al 1923, come straordinario, nel suo volume sul CdV del 1922, edito dal Circolo Matematico di Catania [2], dà la seguente definizione di CdV: ≪*Una quantità reale J può dipendere da tutti i valori che una o più funzioni, di una determinata classe Γ, prendono in un certo campo Ω. Al variare delle funzioni nella classe Γ, la quantità J descriverà un insieme numerico (J), orbene, la ricerca degli estremi inferiore e superiore l e L dell'insieme (J), il decidere se l'estremo inferiore l è il minimo valore di J, il determinare, in tal caso, le funzioni della classe Γ, da definirsi in tutto Ω, che danno a J il valore l, il decidere se l'estremo superiore L è il massimo valore di J, il determinare, in tal caso, le funzioni della classe Γ, da definirsi in tutto Ω, che danno a J il valore L, sono i principali compiti che si propone il calcolo delle variazioni*≫.
In realtà, non è questa una definizione estremamente chiara per i "non matematici": cercherò di chiarirla nel corso di questa conferenza.

Un classico ed importante problema di CdV è quello *isoperimetrico* (iso = stesso, quindi isoperimetrico = stesso perimetro). Questo problema è legato al mito di Didone e alla fondazione della città di Cartagine. Secondo le narrazioni più antiche, Didone era figlia primogenita del re dell'antica città fenicia di Tiro, Muttone, ed era sposa dello zio Sicherba, ricchissimo sacerdote di Eracle. Alla morte di Muttone, il figlio Pigmalione, per impossessarsi del trono, che spettava a Didone, e per impadronirsi delle ricchezze del cognato l'uccise e prese il potere. Per evitare una guerra civile, Didone lasciò Tiro, con la sorella Anna e con pochi compagni, e cominciò una lunga peregrinazione per mare, approdando infine sulle coste dell'attuale Tunisia. Qui Didone ottenne dal potente Iarba, re dei Getuli, per sè e per i suoi compagni, *tanto terreno quanto ne poteva abbracciare una pelle di bue*: l'astuta Didone non si scoraggiò per la poco generosa offerta, ma tagliò la pelle in sottilissime strisce e le unì, in modo da formare una lunga corda. Con questa delimitò lo spazio che sarebbe stato il futuro territorio della città di Cartagine. L'antico soprannome di Cartagine era infatti "Byrsa", parola greca che significa "pelle di bue" [3]. Il problema che Didone

---

[1] CdV nel seguito.

[2] Vedi [28]. Altri testi di CdV dello stesso periodo sono quelli di Gabriele Mammana (1893-1942) [21] e di Leonida Tonelli (1885-1946) [32]. Numerosissime sono le trattazioni recenti sul CdV, ricordiamo qui solo quelle di Mariano Giaquinta e Stefan Hildebrandt [14] e di Enrico Giusti [16].

[3] La leggenda greca di Didone e della fondazione di Cartagine fu ripresa dai latini, e, in particolare, da Virgilio, che nel Libro I dell'*Eneide* descrisse, come è noto, l'arrivo di Enea in Nordafrica, il sotterfugio usato da Didone per carpire

dovette affrontare per avere il più grande territorio possibile per la sua città fu quello di determinare la forma da dare alla sua corda per abbracciare la massima area possibile, o, in altre parole, individuare la figura geometrica piana che, a parità di perimetro, ha area massima. La storia non dice nulla sulla figura che Didone delimitò con la sua corda, probabilmente un cerchio, perché questa è intuitivamente la soluzione del problema.
Secondo un'altra variante, Didone avrebbe voluto che la città che si accingeva a fondare fosse di fronte al mare. In questo caso la forma più conveniente nella disposizione della corda è una semicirconferenza avente gli estremi sulla costa.
Occorrerà attendere due millenni e la nascita del calcolo infinitesimale, che creerà i potenti strumenti del CdV, per avere seri ed approfonditi studi sul problema degli isoperimetri. La risposta definitiva del problema si ha solo nel XIX secolo. È infatti il matematico svizzero Jakob Steiner (1796–1863) che, nel 1838, facendo uso di un processo che verrà chiamato di *simmetrizzazione di Steiner*, riesce a provare che effettivamente la soluzione del problema isoperimetrico (o di Didone) è un cerchio [4].

Esercizio 1. Se fissiamo un numero reale positivo p e consideriamo, ad esempio, il triangolo isoscele di base $\frac{p}{6}$ e altezza $\frac{p}{\sqrt{6}}$, il triangolo equilatero di lato $\frac{p}{3}$, il rettangolo di lati adiacenti $\frac{p}{6}$ e $\frac{p}{3}$, il quadrato di lato $\frac{p}{4}$, l'esagono regolare di lato $\frac{p}{6}$ ed il cerchio di raggio $\frac{p}{2\pi}$, queste sei figure piane hanno, come è immediato verificare, tutte lo stesso perimetro p e aree rispettivamente uguali a: $\frac{p^2}{12\sqrt{6}}$, $\frac{p^2}{12\sqrt{3}}$, $\frac{p^2}{18}$, $\frac{p^2}{16}$, $\frac{p^2}{8\sqrt{3}}$, $\frac{p^2}{4\pi}$. Poiché risulta:

$$\frac{p^2}{12\sqrt{6}} < \frac{p^2}{12\sqrt{3}} < \frac{p^2}{18} < \frac{p^2}{16} < \frac{p^2}{8\sqrt{3}} < \frac{p^2}{4\pi}\,,$$

l'area del cerchio è, a parità di perimetro, la massima tra le aree delle figure considerate.

Esercizio 2. Nell'Esercizio 1 è stato visto che l'area del rettangolo ivi considerato è minore di quella del quadrato avente lo stesso perimetro. Ci si può allora chiedere: tra i rettangoli di perimetro p ne esiste uno di area massima? In caso affermativo qual è? È questo un semplice esercizio di Analisi 1.
Fissato un numero reale positivo p, consideriamo il rettangolo, di perimetro p, avente le misure dei lati adiacenti pari a x e $\frac{p}{2} - x$. È ovvio che deve essere $0 < x < \frac{p}{2}$ e che l'area di questo rettangolo è $A(x) = x(\frac{p}{2} - x) = \frac{p}{2}x - x^2$.
Per risolvere il problema occorrerà allora vedere, al variare di x nell'intervallo $]0, \frac{p}{2}[$, se la funzione $A(x)$ ha valore massimo e in caso affermativo per quali valori di x l'area $A(x)$ è massima. Occorrerà cioé vedere se esiste un punto $x_0 \in]0, \frac{p}{2}[$ tale che:

$$A(x) \le A(x_0)\,, \quad \forall x \in \,]0, \frac{p}{2}[\,.$$

Ora la funzione, di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $\frac{p}{2}x - x^2$ è la parabola, Γ, con asse di simmetria la retta $x = \frac{p}{4}$, vertice nel punto $V \equiv (\frac{p}{4}, \frac{p^2}{16})$, concavità rivolta verso il basso e passante per i punti $O \equiv (0,0)$ e $A \equiv (\frac{p}{2}, 0)$. Il grafico di $A(x)\ :]0, \frac{p}{2}[\to \mathbb{R}$ è allora l'arco OVA della parabola Γ. La funzione $A(x)$ ha quindi massimo (assoluto), che vale $\frac{p^2}{16}$ ed è assunto nel punto $x_0 = \frac{p}{4}$; si ha cioé: $A(x) \le A(x_0) = A(\frac{p}{4}) = \frac{p^2}{16}$, $\forall x \in]0, \frac{p}{2}[$.
Possiamo pertanto concludere affermando che il rettangolo di lati adiacenti $x_0 = \frac{p}{4}$ e $\frac{p}{2} - x_0 = \frac{p}{4}$ è quello avente area massima. Abbiamo così dimostrato che *tra tutti i rettangoli di perimetro p ne esiste uno ed uno solo di area massima ed è il quadrato*.

---

al re Iarda il maggior territorio possibile su cui fondare Cartagine, l'amore di Enea per Didone, ricambiato per volere di Venere, e la tragica fine della regina, dopo aver predetto odio eterno fra Cartagine e la città che Enea andava a fondare in Italia.

[4] Nello spazio a tre dimensioni è la sfera ad avere volume massimo tra tutti i solidi "racchiusi" da superficie di area assegnata A. La sfera gode anche della proprietà di avere la superficie di area minima tra tutti i solidi di volume assegnato V.

Il quadrato gode anche della proprietà di avere, tra tutti i rettangoli di area assegnata A, perimetro minimo. Per provare questa proprietà occorre stavolta studiare, in $]0, +\infty[$, la funzione:

$$p(x) = 2\Big(x + \frac{A}{x}\Big),$$

che dà il perimetro del generico rettangolo di area A, in funzione della misura x di un suo lato [5]. Si ha:

1) $\lim_{x\to0^+} p(x) = \lim_{x\to0^+} 2(x+\frac{A}{x}) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty} 2(x+\frac{A}{x}) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2(1 + \frac{A}{x^2}) = 2$; $\lim_{x\to+\infty}(p(x) - 2x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2A}{x} = 0$;

2) in $]0, +\infty[$, $p'(x) = 2(1 - \frac{A}{x^2}) > 0$ se e solo se $x > \sqrt{A}$, $p'(x) < 0$ se e solo se $0 < x < \sqrt{A}$.
Dalle 1) e 2) segue che le rette $x = 0$ e $y = 2x$ sono asintoti per il grafico di $p(x)$, $p(x)$ è decrescente in $]0, \sqrt{A}]$ e crescente in $[\sqrt{A}, +\infty[$. Nel punto $x = \sqrt{A}$ la funzione $p(x)$ ha un minimo (assoluto), che è unico e vale $p(\sqrt{A}) = 2(\sqrt{A} + \frac{A}{\sqrt{A}}) = 4\sqrt{A}$.
Concludendo il rettangolo di lati $x = \sqrt{A}$ e $y = \frac{A}{\sqrt{A}}$, cioé *il quadrato è, tra tutti i rettangoli di assegnata area A, quello di perimetro minimo.*

Esercizio 3. È anche facile dimostrare che, *tra tutti i triangoli con uguale perimetro p, il triangolo equilatero è quello di area massima.*
Occorre studiare stavolta la funzione reale delle due variabili reali x e y:

$$A(x, y) = \sqrt{\frac{p}{2}(\frac{p}{2} - x)(\frac{p}{2} - y)(\frac{p}{2} - p + x + y)},$$

che, per la formula di Erone, dà l'area del generico triangolo di perimetro p e lati x, y e $p - x - y$, ricercandone il massimo nell'insieme T dei punti (x, y) del piano soddisfacenti le condizioni:

$$0 < x < \frac{p}{2}, \quad 0 < y < \frac{p}{2}, \quad \frac{p}{2} < x + y < p.$$

Queste limitazioni si ottengono imponendo che la misura di ogni lato del triangolo sia positiva e minore della somma delle misure degli altri due lati. Facendo uso dei metodi di Analisi 2, si prova facilmente che in T c'è un solo punto di massimo per la funzione $A(x, y)$, che è quello di coordinate $(\frac{p}{3}, \frac{p}{3})$. Si ha cioé:

$$A(x, y) \le A(\frac{p}{3}, \frac{p}{3}) = \frac{p^2}{12\sqrt{3}}, \quad \forall (x, y) \in T.$$

Possiamo pertanto concludere affermando che il triangolo di lati $x = \frac{p}{3}$, $y = \frac{p}{3}$ e $p - x - y = p - \frac{p}{3} - \frac{p}{3} = \frac{p}{3}$ è quello di area massima. Abbiamo così dimostrato che, tra tutti i triangoli con uguale perimetro p, ne esiste uno ed uno solo di area massima e questo è il triangolo equilatero [6].

Il triangolo equilatero gode anche della proprietà di avere, tra tutti i triangoli di area assegnata A, perimetro minimo.

Analiticamente il problema fondamentale degli isoperimetri può essere formulato nel modo seguente.
Siano $x(t)$ e $y(t)$ due funzioni reali della variabile reale t, definite entrambe nello stesso intervallo $[a, b]$ e sia Γ la *curva piana* definita (in *forma parametrica*) da

$$\Gamma = \{(x(t), y(t)),\ t \in [a, b]\}.$$

Se $x(t)$ e $y(t)$ soddisfano le seguenti condizioni:

[5] È chiaro che il lato adiacente a quello di misura x ha misura $y = \frac{A}{x}$, dovendo essere il prodotto $x \cdot y$ uguale all'area assegnata A.

[6] Meno facile è provare che, *tra tutti i poligoni piani ad n lati e con uguale perimetro p, il poligono regolare è quello di area massima.*

i) $x(t)$ e $y(t)$ sono in $[a,b]$ continue insieme con le derivate prime (di classe C^1),

ii) $x'^2(t) + y'^2(t) > 0$, $\forall\, t \in [a,b]$,

iii) $(x(a), y(a)) = (x(b), y(b))$,

iv) l'applicazione: $t \to u(t) = (x(t), y(t))$, di $[a,b[$ in $\mathbb{R}^2$, stabilisce una corrispondenza biunivoca tra $[a,b[$ e Γ,

Γ è una curva *chiusa* e *rettificabile* (con lunghezza $p = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$). La figura piana, I_Γ, da essa "delimitata" ha area uguale a

$$J(u) = J(x,y) = \int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\, dt\,. \tag{1.1}$$

Il problema è allora: massimizzare l'integrale (1.1) al variare di $u(t) = (x(t), y(t)) \,:\, [a,b] \to \mathbb{R}^2$ nella famiglia $\mathcal{F}$ delle funzioni soddisfacenti le i)–iv) e tali che l'integrale $\int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$ è costante ed uguale ad un assegnato numero reale positivo p. La funzione $u_0(t) = (x_0(t), y_0(t))$ che rende massimo l'integrale (1.1):

$$J(u) \le J(u_0)\,, \quad \forall\, u \in \mathcal{F}\,,$$

è la soluzione cercata.
È questa la formulazione più generale del problema isoperimetrico.

2 I problemi geodetico e della brachistocrona.

Fra i più antichi problemi di CdV, oltre quello isoperimetrico, vanno ricordati il problema *geodetico* e quello della *brachistocrona*.

Il problema della ricerca delle geodetiche consiste nel determinare i "cammini" di lunghezza minima fra due punti distinti di una superficie.
Se la superficie è un piano il problema è banale. In questo caso, fissati nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale e due punti distinti $A \equiv (x_0, y_0)$ e $B \equiv (x_1, y_1)$ (supponiamo $x_0 < x_1$, per fissare le idee), occorrerà determinare la curva piana rettificabile congiungente i due punti A e B di lunghezza minima.
Ora tra le curve piane rettificabili congiungenti i due punti A e B ci sono i grafici delle funzioni reali $u(x)$ di classe C^1 in $[x_0, x_1]$ e tali che: $u(x_0) = y_0$ e $u(x_1) = y_1$, che, come è noto, hanno lunghezza:

$$J(u) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + u'^2(x)}\, dx\,. \tag{2.1}$$

Si può allora restringere la ricerca a queste funzioni, cercare cioé il minimo dell'integrale (2.1) al variare di u nella famiglia $\mathcal{F}$ delle funzioni reali $u(x)$ di classe C^1 in $[x_0, x_1]$ e tali che: $u(x_0) = y_0$, $u(x_1) = y_1$.
Se le curve piane Γ congiungenti A con B sono espresse nella forma parametrica:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \qquad t \in [a,b]\,,$$

con le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ soddisfacenti le condizioni: i), ii) e iv) (con $[a,b]$ al posto di $[a,b[$) del n. 1 e tali che:

$$(x(a), y(a)) = (x_0, y_0)\,, \quad (x(b), y(b)) = (x_1, y_1)\,,$$

allora occorrerà ricercare in questa famiglia il minimo del seguente integrale:

$$J(u) = J(x, y) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt\,, \tag{2.2}$$

che, come già osservato nel n. 1, fornisce la lunghezza di Γ.
Ovviamente in entrambi i casi ((2.1) e (2.2)) la soluzione cercata è il segmento di estremi A e B.

Meno banale è il caso in cui la superficie, su cui sono assegnati i punti da congiungere, non è piana. Nel Settecento il problema geodetico che attirò maggiore interesse fu quello riguardante i "cammini" di lunghezza minima tra due punti della superficie della Terra, la cui forma i matematici assimilavano ad una ellissoide o a un qualche tipo di superficie di rotazione.
Le prime ricerche sulle geodetiche risalgono alla fine del Seicento, allorché Johann Bernoulli (1667–1748) nel *Journal des Sçavans* del 1697 pose il problema di trovare l'arco più breve compreso fra due punti di una superficie convessa. Il fratello maggiore, Jakob (1654–1705) risolse il problema delle geodetiche per i cilindri, i coni e le superficie di rotazione.

Alla ricerca del minimo di un integrale dipendente da una funzione u, che varia in una opportuna famiglia $\mathcal{F}$, si perviene anche nello studio del problema della brachistocrona (dal greco "brachistos" (il più breve) e "chronos" (tempo)): problema questo che ha generato, come vedremo, aspre competizioni, risultati errati, litigi, invidie e gelosie.
Vediamo di cosa si tratta.
Assegnate due posizioni A e B in un piano verticale in modo che B sia al di sotto di A e non giaccia sulla verticale per A, consideriamo un punto materiale P di massa m soggetto alla sola forza di gravità che si muova senza attrito nel piano verticale da A a B. Si chiede di determinare la curva lungo cui il punto P deve muoversi partendo da A, con velocità iniziale v_0, per raggiungere B nel minimo tempo possibile.
Se fissiamo nel piano verticale dove si muove P un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, avente per origine il punto A e per asse delle $\vec{y}$ la verticale rivolta verso il basso, se, in questo sistema di riferimento, indichiamo con (x_1, y_1), x_1, $y_1 > 0$, le coordinate del punto B e con $u(x)$: $[0, x_1] \to \mathbb{R}$ una funzione, di classe $C^1([0, x_1])$, lungo il cui grafico si muove P, risulta chiaro che $u(x)$ dovrà soddisfare le condizioni:

$$u(0) = 0\,, \quad u(x_1) = y_1\,. \tag{2.3}$$

Denotato con $T(u)$ (> 0) il tempo occorrente al punto mobile P per spostarsi da A a B lungo il grafico di $u(x)$, l'energia totale di P all'istante $t \in]0, T(u)]$, quando P è nella posizione $(x(t), u(x(t)))$ ed ha velocità $v(t)$, è:

$$\frac{1}{2}\, mv^2(t) - mgu(x(t))\,,$$

dove g è l'accelerazione gravitazionale. L'energia totale di P all'istante iniziale, quando P è nella posizione A, è invece:

$$\frac{1}{2}\, mv_0^2 - mg \cdot 0\,.$$

Ora, per il principio della conservazione dell'energia, per ogni $t \in [0, T(u)]$, si dovrà avere:

$$\frac{1}{2}\, mv^2(t) - mgu(x(t)) = \frac{1}{2}\, mv_0^2\,. \tag{2.4}$$

Ricavando dalla (2.4) $v(t)$, si ha:

$$v(t) = \sqrt{v_0^2 + 2gu(x(t))}\,. \tag{2.5}$$

D'altra parte la lunghezza dell'arco di curva percorso dal punto P all'istante $t \in [0, T(u)]$ (che non è altro che l'arco del grafico della funzione u di estremi $(0, 0)$ e $(x(t), u(x(t)))$) è:

$$s(t) = \int_0^{x(t)} \sqrt{1 + u'^2(\tau)}\, d\tau\,,$$

quindi, per il teorema di derivazione delle funzioni composte e per il teorema di Torricelli sulla derivazione della funzione integrale, si ha:

$$s'(t) = \sqrt{1 + u'^2(x(t))} \cdot x'(t)\,,$$

che, grazie alla (2.5) e all'uguaglianza $v(t) = s'(t)$, si può così scrivere:

$$\sqrt{v_0^2 + 2gu(x(t))} = \sqrt{1 + u'^2(x(t))} \cdot x'(t)\,,$$

da cui segue:

$$x'(t) = \sqrt{\frac{v_0^2 + 2gu(x(t))}{1 + u'^2(x(t))}} > 0\,, \quad \forall t \in [0, T(u)]\,. \tag{2.6}$$

La (2.6) mostra che la funzione $x(t)$, di $[0, T(u)]$ su $[0, x_1]$, è invertibile. Se denotiamo allora con $t(x)$ la sua funzione inversa, risulta, grazie al teorema di derivazione delle funzioni inverse:

$$t'(x) = \frac{1}{x'(t(x))} = \sqrt{\frac{1 + u'^2(x)}{v_0^2 + 2gu(x)}}\,, \quad \forall x \in [0, x_1]\,.$$

Dunque il tempo $T(u)$ impiegato dal punto P per andare da $A \equiv (0, 0)$ a $B \equiv (x_1, y_1)$, lungo il grafico di $u(x)$, è uguale a:

$$T(u) = \int_0^{x_1} t'(x)\,dx = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + u'^2(x)}{v_0^2 + 2gu(x)}}\,dx\,. \tag{2.7}$$

Per risolvere il problema della brachistocrona occorre quindi determinare il minimo dell'integrale (2.7) al variare della funzione incognita u nella famiglia $\mathcal{F}$ delle funzioni reali $u(x)$ di classe C^1 in $[0, x_1]$ e tali che: $u(0) = 0$ e $u(x_1) = y_1$.

Questo problema fu proposto per la prima volta in forma ufficiale da Johann Bernoulli negli *Acta Eruditorum* del 1696, per sfidare e mettere in imbarazzo il fratello Jakob. Johann aveva trovato, mediante una dimostrazione errata, non pubblicata, che la curva doveva essere una *cicloide*. Dopo che Jakob ebbe dimostrato in maniera corretta che la curva cercata era effettivamente una cicloide, Johann cercò di spacciare per sua la dimostrazione del fratello. Inevitabile ed aspro fu il conflitto tra i due fratelli.

La cicloide (o roulette, o trocoide) è, con le parole di Blaise Pascal (1623–1662), la curva che descrive ≪*il percorso che fa nell'aria il punto di una ruota, quando essa rotola nel suo movimento normale, dal momento in cui il punto comincia a sollevarsi da terra, fino al momento in cui la rotazione continua della ruota l'abbia ricondotto a terra, dopo un giro completo: supposto che la ruota sia un cerchio perfetto, il punto preso in esame un punto della circonferenza, e la terra perfettamente piana*≫.

In proposito, la storia della matematica narra che Pascal una notte del 1658, quando aveva già abbandonato la matematica per dedicarsi interamente alla teologia, non riusciva ad addormentarsi per un forte mal di denti: per distrarsi e dimenticare il dolore rivolse nuovamente l'attenzione agli studi matematici, occupandosi appunto della cicloide. Miracolosamente il dolore cessò, e questo fatto fu interpretato da Pascal come un segno di Dio con il quale Egli voleva fargli capire che non disdegnava lo studio della matematica [7] [8].

---

[7] Questa curva ha altre interessanti proprietà. Christiaan Huygens (1629–1695) aveva scoperto che un oggetto posto su un arco di cicloide capovolto di un piano verticale rotolerà, in mancanza di attrito, da un qualsiasi punto al punto più basso esattamente nello stesso tempo, qualunque sia il punto di partenza. La cicloide è quindi una curva *tautocrona*, oltre che brachistocrona.

[8] Maggiori dettagli sui problemi classici del CdV trovansi in M. Kline [19].

A problemi di CdV si perviene anche nella risoluzione di problemi “di vita quotidiana”. Facciamo un esempio. Supponiamo di voler andare in auto da una città A ad una città B che distano l chilometri, e che partendo da A al tempo t_0 si debba essere in B al tempo t_1 (con t_1, ovviamente, maggiore di t_0). Supponiamo che il consumo di carburante sia proporzionale al quadrato della velocità. Ci si chiede: a quale velocità si deve procedere in modo da rendere minima la spesa?
Il problema può essere così schematizzato. Se $u(t)$ è lo spazio percorso dall'auto al tempo $t \in [t_0, t_1]$ (*legge del moto*), si dovrà necessariamente avere:

$$u(t_0) = 0\,, \quad u(t_1) = l\,. \tag{2.8}$$

D'altra parte, poiché $u'(t)$ è la velocità dell'auto al tempo t, il consumo totale di carburante sarà dato dall'integrale:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} u'^2(t)\,dt\,. \tag{2.9}$$

Per avere allora il minimo costo occorrerà ricercare la funzione $u(t)$, di classe C^1 in $[t_0, t_1]$, soddisfacente le condizioni (2.8), che minimizza l'integrale (2.9). Abbiamo così ricondotto la questione ad un problema tipico del CdV.
Se supponiamo, più in generale, che il consumo dipenda, oltre che dalla velocità, anche dal tempo t (ad esempio nelle ore più calde l'auto consuma più carburante) e dalla posizione $u(t)$ (per via di tratti in salita o in discesa), allora nell'integrale (2.9) l'integrando sarà una funzione, $f(t, u, u')$, delle variabili t, u, u'. In questo caso più generale occorrerà individuare quindi il minimo dell'integrale che si ottiene da (2.9) sostituendo a $u'^2(t)$ la funzione $f(t, u(t), u'(t))$, al variare sempre di $u(t)$ nella famiglia $\{u \in C^1([t_0, t_1]) : u(t_0) = 0,\ u(t_1) = l\}$ (vedi E. Giusti [15]).

3 Breve storia della famiglia Bernoulli.

Nel n. 2, parlando dei problemi geodetico e della brachistocrona, abbiamo menzionato i due fratelli matematici Jakob e Johann Bernoulli. Non furono questi i soli matematici della famiglia: la famiglia Bernoulli occupa nella storia della matematica un posto di primo piano per l'elevato numero di matematici di prestigio che nel corso del Seicento e del Settecento ha fornito. Fra i suoi componenti una dozzina circa si affermarono nel campo della matematica e della fisica e quattro furono eletti membri stranieri dell'Accademia delle Scienze di Parigi.
Quando si parla di teorema di Bernoulli o di disuguaglianza o di equazione di Bernoulli non si sa mai con precisione a quale membro della famiglia ci si riferisca. Questa confusione è aggravata dal fatto che spesso lo stesso componente è indicato nella letteratura matematica con nomi diversi: Jacques Bernoulli è, ad esempio, noto anche come Jakob, James e Giacomo Bernoulli, stessa cosa per il fratello Johann, noto anche come Jean, John e Giovanni. Il motivo di così tanti nomi sta evidentemente nel fatto che ogni nazione sostituiva il nome originario con quello equivalente del luogo: Jakob è la forma tedesca di Jacques, mentre James è la forma anglicizzata; Giacomo è ovviamente il nome in italiano.
I primi Bernoulli a raggiungere grande notorietà nel campo della matematica furono Jakob e Johann, entrambi nati a Basilea e figli di Nicolaus Bernoulli (1623-1708): Jakob era il quinto figlio di Nicolaus, mentre Johann era il decimo. Nicolaus Bernoulli aveva dei piani ben precisi per il futuro di questi due suoi figli, piani che non includevano le scienze, né tanto meno la matematica: Jakob era destinato al clericato e Johann alla mercatura. Il più anziano dei fratelli si innamorò della matematica studiando da solo *La Géometrie* di René Descartes (1596-1650), l'*Arithmetica infinitorum* di John Wallis (1616-1703) e le *Lectiones geometricae* di Isaac Barrow (1630-1677). Successivamente, gli scritti di Leibniz degli anni 1684-1686 gli permisero di impadronirsi dei nuovi metodi del calcolo differenziale ed integrale, che illustrò con profitto al fratello minore Johann. Quest'ultimo nel 1691 abbandonati i precedenti studi (la sua dissertazione di dottorato riguardava

l'effervescenza e la fermentazione), si volse alla matematica e, in particolare, al calcolo infinitesimale. Tale fu l'entusiasmo per questa disciplina da comporre nel suo primo anno di studi di matematica due manuali sul calcolo differenziale e su quello integrale.
Jakob e Johann furono fra i più entusiasti seguaci di Leibniz e, nella disputa Newton-Leibniz, difesero la causa di quest'ultimo con ingiustificata aggressività. In particolare, Johann fu il "cane mastino" di Leibniz: egli fece per il calcolo infinitesimale quello che più tardi avrebbe fatto Thomas Henry Huxley (1825-1895) per la teoria darwiniana dell'evoluzione. La sua mancanza di tatto lo fece anche entrare in aspra competizione con il fratello più anziano: riteneva infatti che quest'ultimo lo trattasse con condiscendenza. I rapporti tra i due fratelli, che in gioventù erano quelli che d'ordinario passano fra un maestro illuminato e un devoto discepolo, coll'andar del tempo si fecero freddi e finirono col meritare l'epipeto di "fraterni" soltanto da chi volga la mente a Caino ed Abele. La gelosia spinse inoltre Johann a buttare fuori di casa il figlio Daniel, quando questi fu dall'Accademia di Parigi giudicato degno di condividere col padre il premio relativo al concorso dell'anno 1734; a gettare legna sul fuoco contribuì la mala azione commessa dal padre che si era appropriato di risultati che il figlio aveva inseriti nella sua *Hydrodynamica* (1738).
Nonostante questo cattivo carattere, Johann Bernoulli fu un ricercatore infaticabile. Viene considerato oggi l'inventore del CdV, a motivo del problema della brachistocrona da lui, come già detto, proposto nel 1696. Fu anche un insegnante molto stimolante, testimonia ciò il gran numero di giovani che accorrevano ad ascoltarlo da ogni parte d'Europa e le frequenti chiamate che egli riceveva da grandi università. Ebbe tra i suoi allievi, all'Università di Basilea, Leonhard Eulero (1707-1783) e prima, mentre soggiornava a Parigi nel 1692, il marchese francese Guillaume François Antoine de L'Hôpital (1661-1704). Johann Bernoulli firmò addirittura un contratto in base al quale, dietro il compenso di un salario regolare, si impegnava a comunicare al de L'Hôpital tutte le sue scoperte matematiche, lasciando al marchese la libertà di farne l'uso che desiderasse. Tale contratto ebbe come risultato che uno dei principali contributi di Johann Bernoulli, risalente al 1694, da allora fu sempre conosciuto come la *regola di de L'Hôpital sulle forme indeterminate*. Questa regola, oggi molto nota e che "fa la gioia" degli studenti alle prese con il calcolo di limiti che si presentano nelle forme indeterminate $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, fu infatti inserita nel trattato di Analisi infinitesimale di de L'Hôpital, pubblicato a Parigi nel 1696.
Anche il fratello Jakob fu un matematico di alta levatura. A quest'ultimo si devono: il noto *teorema dei grandi numeri* del calcolo delle probabilità, la *disuguaglianza di Bernoulli*, la risoluzione dell'*equazione differenziale di Bernoulli*, lo studio della *catenaria*, della *clotoide*, della *lemniscata di Bernoulli* e della *spirale logaritmica*. Quest'ultima curva fu quella che stimolò maggiormente l'immaginazione di Jakob Bernoulli: egli mostrò che l'*evoluta*, la *podaria* e la *caustica* di una spirale logaritmica coincidono tutte con la spirale iniziale. ≪*Pieno di entusiasmo per questa mirabile spirale, che in ogni occasione rivelavasi "simillima filia matri", la riguardò quale simbolo della forza nelle avversità e manifestò il voto che la figura relativa fosse scolpita sulla sua tomba col motto "eadem mutata resurgo"* [pur attraverso trasformazioni, rinasco sempre la stessa], *voto che fu esaudito*≫ (G. Loria [20]).
La generazione successiva a quella di Jakob e Johann Bernoulli ebbe quattro insigni matematici: Nicolaus II (1687-1759), figlio di un fratello, Nicolaus I (1662-1716), dei due fondatori di questa dinastia di matematici e discepolo di entrambi, e i tre fratelli, figli di Johann, Nicolaus III (1695-1726), Daniel I (1700-1782) e Johann II (1710-1790).
Nicolaus II per un triennio, a partire dal 1716, occupò all'Università di Padova la cattedra di matematica che un secolo prima era stata di Galileo Galilei (1564–1642). Dei tre fratelli, Nicolaus III, Daniel I e Johann II, il più celebre fu Daniel, le cui ricerche nel campo dell'idrodinamica si riassumono nel principio che porta il suo nome. Nel campo della matematica divenne famoso soprattutto per la sua distinzione, nell'ambito della teoria delle probabilità, tra *speranza matematica* e *speranza morale*. Allorché Daniel Bernoulli fu chiamato a San Pietroburgo nel 1725, anche il fratello maggiore, Nicolaus III, vi fu chiamato come professore di matematica. L'inclemenza del clima spense Nicolaus III l'anno dopo la sua chiamata, all'età di 31 anni. Una commovente necrologia fu scritta da Daniel, segno questo che, nonostante tutto, anche nella famiglia Bernoulli regnavano

tra alcuni suoi componenti buoni sentimenti. La morte di Nicolaus III fu una grave perdita per la matematica, vista l'eccellenza dei risultati da lui raggiunti in geometria, in aritmetica e nel campo delle equazioni differenziali.
Il terzo figlio di Johann, Johann II, successe al padre nell'insegnamento della matematica all'Università di Basilea. Quattro sue memorie furono premiate dall'Accademia delle Scienze di Parigi, testimoniando le sue eminenti doti di matematico. Il suo carattere indolente gli vietò però di lasciare nella scienza un'orma più vasta e profonda.
Anche i figli di Johann II, Johann III (1744-1807) e Jakob II (1759-1789), furono validi matematici. In particolare, Jakob II avrebbe potuto continuare degnamente le tradizioni di famiglia se la morte non l'avesse colto in giovane età: perì infatti all'età di trent'anni, dopo aver dato alle stampe pregevoli lavori di meccanica, annegato nelle acque della Neva.
Completiamo il quadro della famiglia Bernoulli con una curiosità, poco nota anche ai matematici. L'autore del meraviglioso libro *Siddharta*, nonché Premio Nobel per la Letteratura nel 1946, Hermann Hesse (1877–1962), fu sposo di una delle ultime discendenti della famiglia Bernoulli: Maria Bernoulli (1869-1963), fotografa professionista in Basilea, morta nel 1963 all'età di 94 anni.

4 L'equazione di Eulero-Lagrange e biografia di Leonhard Eulero.

Problemi più complessi di quelli visti nei nn. 1 e 2 portano alla minimizzazione o alla massimizzazione di *integrali multipli* del tipo:

$$J(u) = \int_\Omega f(x, u, Du)\,dx = \int_\Omega f(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n})\,dx\,,$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ e $Du = (u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n})$.
Questo è il caso del problema dell'equilibrio di una membrana elastica soggetta ad una deformazione al bordo.
Sia data in $\mathbb{R}^3$, dove è fissato un sistema di riferimento cartesiano, una membrana perfettamente elastica che in posizione di riposo occupi un dominio Ω del piano x, y. Se ne deformiamo il bordo $\partial\Omega$ in direzione parallela all'asse $\vec{z}$, in modo che la proiezione sul piano x, y sia sempre Ω e su $\partial\Omega$ coincida con il grafico di una assegnata funzione φ, la membrana assumerà una nuova posizione di equilibrio. Il problema che si pone è quello di determinare questa nuova posizione.
Denotiamo con $u(x, y)$ e con $\varphi(x, y)$ le funzioni reali, definite, rispettivamente, in Ω e su $\partial\Omega$, i cui grafici danno le posizioni della membrana nei punti di Ω e di $\partial\Omega$. Il principio di minima azione ci dice che la posizione di equilibrio cercata è quella corrispondente al minimo dell'energia potenziale di deformazione. Ora, poiché l'energia potenziale di deformazione per una posizione $u = u(x, y)$ è fornita dall'integrale doppio (*integrale di Dirichlet*):

$$V(u) = \frac{1}{2}\,\tau \iint_\Omega (u_x^2 + u_y^2)\,dxdy\,,$$

dove τ è la tensione della membrana, occorrerà ricercare il minimo di quest'integrale al variare di u nella famiglia $\mathcal{F}$ delle funzioni di classe C^1 in $\overline{\Omega}$ tali che: $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.

Gli esempi di problemi di CdV visti nei nn. 1 e 2 e quest'ultimo mostrano un comune obiettivo: individuare in un insieme $\mathcal{F}$ di funzioni, dette *funzioni ammissibili*, il minimo o il massimo di una funzione J di $\mathcal{F}$ in $\mathbb{R}$, che prende il nome di *funzionale* [9]. In una formulazione generale, non vi sono a priori restrizioni sull'espressione del funzionale J da minimizzare o massimizzare e sulla classe delle funzioni ammissibili. I funzionali $J(u)$ tipici del CdV sono espressi mediante integrali.

[9] Si chiama *funzionale* una funzione, come J, il cui argomento, invece di un numero, è esso stesso una funzione.

L'integrale più semplice del CdV è del tipo:

$$J(u) = \int_{x_0}^{x_1} f(x,u,u')\,dx\,. \tag{4.1}$$

Nel caso del problema della brachistocrona è $f(x,u,u') = \sqrt{\frac{1+u'^2}{v_0^2+2gu}}$, mentre per quello geodetico piano (in cui le curve congiungenti A con B sono grafici di funzioni) è $f(x,u,u') = \sqrt{1+u'^2}$.

Leonhard Eulero riuscì a dare un metodo generale per la determinazione dei minimi e dei massimi dell'integrale (4.1), da cui nasce la *teoria classica del CdV*. Egli dimostrò che *se una funzione* $u(x)$ *rende minimo o massimo l'integrale* (4.1)*, allora* $u(x)$ *deve necessariamente soddisfare la seguente equazione differenziale ordinaria:*

$$\frac{d}{dx} f_{u'}(x,u,u') = f_u(x,u,u')\,. \tag{4.2}$$

Questa equazione differenziale, che Eulero pubblicò nel 1744 e che è oggi denominata *equazione di Eulero (o di Eulero-Lagrange)* dell'integrale J, è *l'equazione differenziale fondamentale del CdV*. Le sue soluzioni sono chiamate *estremali*.
Le funzioni u che minimizzano o massimizzano l'integrale (4.1), e che sono chiamate *estremanti*, vanno pertanto cercate tra le soluzioni dell'equazione di Eulero.

Leonhard Eulero nacque nelle vicinanze di Basilea il 15 aprile 1707 e all'età di tredici anni fu in grado d'iscriversi alla facoltà di Filosofia dell'Università di Basilea, con l'intendimento di dedicarsi alla teologia, come era desiderio dei genitori.
In quegli anni l'Università di Basilea era in declino: aveva soltanto diciannove professori, sottopagati e per la maggior parte mediocri. L'eccezione era Johann Bernoulli, con cui, per fortuna della Matematica, venne presto in contatto il giovane studente. Il Bernoulli, avendo saputo ben valutare il valore del giovinetto, lo incoraggiò allo studio delle scienze e, in particolare, della matematica. ≪*L. Euler, non ancora ventenne, fece pubblicare negli A.E.* [Acta Eruditorum] *(1726) una memoria* [...] *che riscosse il plauso entusiastico del maestro, il quale da quel momento dimostrò al suo giovane discepolo una benevolenza che gli conservò fino alla morte e che fu ed è oggetto di meraviglia per chi ricorda che egli non seppe vincere l'invidia da cui era dominato, neppure quando trattavasi dei propri figli*≫ (G. Loria [20]). Proprio nell'autunno di quell'anno Eulero fu invitato dal suo antico e già illustre condiscepolo Daniel I Bernoulli a raggiungere San Pietroburgo, per occuparsi di Medicina presso l'Accademia delle Scienze. Nonostante l'insufficiente stipendio (200 rubli), Eulero decise di recarvisi. Il 5 aprile 1727 lasciò Basilea (dove non sarebbe più tornato) e, dopo un lungo e duro viaggio, il 17 maggio arrivò a San Pietroburgo. Qui, dopo alterne vicende, che lo costrinsero dapprima ad accettare un posto di medico della marina russa, ottenne nel 1730 il posto di professore di fisica nell'Accademia e poi, nel 1733, quello più prestigioso di professore di matematica, già occupato da Daniel I Bernoulli.
La stabilità economica gli consentì di sposarsi (con Katharina Gsell, da cui ebbe tredici figli di cui solo tre maschi e due femmine sopravvissero alla prima infanzia) e di dedicarsi a pieno tempo alla ricerca scientifica, occupandosi di: Geometria, Teoria dei numeri, Analisi infinitesimale, Teoria matematica dell'elasticità, Teoria musicale, Astronomia, Balistica, Geografia matematica, Teoria dei grafi [10].
Nel 1744 Eulero dà alle stampe il primo dei suoi fondamentali trattati, il *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, che è il primo lavoro sistematico di quello che verrà detto *Calcolo delle Variazioni*. Qui appare per la prima volta la già citata equazione di Eulero.

[10] Di quest'ultima teoria Eulero fu il fondatore: a lui è dovuto infatti il primo lavoro di Teoria dei grafi, che apparve nel 1736 nei *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, per dare una risposta al cosiddetto *Problema dei ponti di Königsberg.*

Eulero muore a San Pietroburgo il 18 settembre 1783. Così è descritta la sua fine nel saggio di R.S. Calinger *Leonhard Euler: vita e pensiero*, pubblicato in [2]: ≪*Fino alla sua morte* [...] *Euler rimase entusiasta e perspicace sia nella ricerca che nell'insegnamento. Spiegava Matematica elementare a quattro suoi nipoti e l'ultima mattina stava istruendo un nipote dotato nelle scienze e faceva calcoli a mente che poi scriveva alla lavagna del suo studio su quanta aria calda occoresse ad un pallone per alzarsi. Erano appena arrivate a San Pietroburgo, ed erano diventate l'argomento del giorno* [...], *le notizie del successo dei fratelli Montgolfier sull'ascesa del pallone sopra Parigi.* [...] *Intorno alle cinque, all'ora del tè, aveva giocato un po' col proprio nipote. Beveva tè e fumava la pipa. Improvvisamente la pipa gli cadde dalle mani. "La mia pipa", disse e si piegò per raccoglierla. Non riuscì e si alzò in piedi. Per un anno Euler aveva sofferto di vertigini e di cattiva salute. Ora ebbe un colpo. Raccogliendo le mani sulla pancia, disse "Sto morendo" e perse definitivamente conoscenza. Morì verso le undici di quella sera*≫.
Due secoli più tardi, il matematico ungherese Paul Erdős (1913-1996), riferendosi all'ultima frase di Eulero: "Sto morendo", ebbe a dire: ≪*Quella fu l'ultima "congettura" di Eulero, e si rivelò presto "esatta"*≫.
Eulero diede prova di una fecondità scientifica senza esempio, prima e dopo di lui. La sua capacità di lavorare in qualunque circostanza è proverbiale, lavorava spesso nell'ultimo periodo della sua vita, quando era quasi cieco, circondato da una nidiata di nipoti, accatastando i lavori completati uno sull'altro. Quando l'Accademia di San Pietroburgo, da cui dipendeva, gli chiedeva lavori da pubblicare, prendeva i primi della catasta, che naturalmente erano i più recenti, passando via via agli altri. Questo metodo portò spesso alla pubblicazione di risultati ormai superati da altri più recenti di Eulero stesso.
Eulero, prima della morte, aveva promesso al conte Grigorij Grigor'evič Orlov (1734-1783), responsabile dell'Accademia, di preparare abbastanza articoli per le riviste dell'Accademia per i successivi venti anni, ma ne lasciò un numero sufficiente per quasi cinquanta.
≪*La tradizione riferisce che egli soleva dire che la sua penna lo superasse in intelligenza, così spontaneo era il fiume di memorie che uscivano da essa. Nel corso della sua vita Eulero pubblicò più di 500 lavori, tra libri e articoli, e per quasi mezzo secolo dopo la sua morte fra le pubblicazioni dell'Accademia di San Pietroburgo continuarono ad apparire suoi lavori. La bibliografia degli scritti di Eulero, compresi quelli postumi, comprende 886 titoli. L'edizione integrale di tutte le sue opere, in corso di pubblicazione sotto gli auspici del governo svizzero, si avvicinerà, secondo le previsioni più realistiche, a settantacinque sostanziosi volumi*≫ (C.B. Boyer [3]).
Grazie a questa enorme mole di lavori Eulero ha conquistato il primato di matematico più prolifero della storia. Sembra però che recentemente questo invidiabile primato gli sia stato sottratto da Paul Erdős, che alla sua morte, avvenuta il 20 settembre 1996, aveva pubblicato, da solo o in collaborazione, la bellezza di 1475 lavori scientifici, molti monumentali e tutti consistenti. Così descrive Erdős il suo biografo Paul Hoffman (in [18]): ≪*Erdős aveva strutturato la sua vita per massimizzare il tempo da dedicare alla matematica. Non aveva moglie, né figli, né lavoro, né hobby, nemmeno una casa che lo legassero. Viveva di una valigia logora e di una borsa di plastica color arancio sporco del Centrum Aruhaz ("Magazzino Centrale"), dei grandi magazzini di Budapest. Alla continua ricerca di bei problemi e nuovi talenti matematici, andava avanti e indietro per quattro continenti a un ritmo frenetico, spostandosi da un'università o un centro di ricerca all'altro. Il suo "modus operandi" consisteva nel presentarsi alla porta di un collega, dichiarare "la mia mente è aperta", lavorare con lui per uno o due giorni, finché non s'annoiava o il collega non ce la faceva più, e poi passare a un'altra casa*≫.

5 Il metodo delle variazioni di Lagrange.

Nel 1750 il torinese Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813), quando aveva appena diciannove anni, stimolato dalle ricerche di Eulero, cominciò ad occuparsi di problemi del CdV, facendo uso però, differentemente da Eulero, di metodi puramente analitici. Nel 1755, undici anni dopo la

pubblicazione del *Methodus inveniendi*, elaborò un procedimento generale, che comunicò per lettera ad Eulero. Il metodo elaborato da Lagrange, pubblicato nel 1760 nella rivista *Miscellanea Taurinensia*, era in grado di trattare una grande varietà di problemi e venne da lui descritto come *metodo delle variazioni* e da Eulero, qualche anno dopo, *calcolo delle variazioni*: Eulero attese a pubblicare articoli su questo argomento, per dare a Lagrange il pieno merito della scoperta.
Il metodo di Lagrange, applicato al più semplice integrale del CdV, consiste nell'introdurre nell'integrando una nuova funzione, della forma $u(x) + \delta u(x)$, dove δ è un simbolo speciale (detto *operatore di Lagrange*), e nello studiare la variazione dell'integrale nel passaggio dalla funzione $u(x)$ a $u(x) + \delta u(x)$.
Illustriamo brevemente il metodo di Lagrange applicandolo all'integrale (4.1).
Detti (x_0, y_0) e (x_1, y_1) due punti distinti del piano, con $x_0 < x_1$, supponiamo che le funzioni $u(x) : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ della famiglia, $\mathcal{F}$, in cui vanno cercati i massimi e minimi dell'integrale:

$$J(u) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, u(x), u'(x))\, dx\,, \tag{5.1}$$

soddisfino le seguenti condizioni:

j) $u(x_0) = y_0$, $u(x_1) = y_1$;

jj) $u(x) \in C^1([x_0, x_1])$.

Supponiamo inoltre che la funzione reale, delle tre variabili reali x, u, u', $f(x, u, u')$, che figura nell'integrale (5.1), sia di classe C^1 in $[x_0, x_1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Ciò premesso, se $\bar{u} \in \mathcal{F}$ è un eventuale estremante per l'integrale (5.1), ad esempio un minimo, si ha:

$$J(\bar{u}) \le J(u)\,, \quad \forall u \in \mathcal{F}\,. \tag{5.2}$$

Quest'ultima maggiorazione varrà in particolare per le funzioni u di $\mathcal{F}$ del tipo: $u = \bar{u} + \varepsilon\varphi$, dove φ è una funzione fissata ad arbitrio in $C^1([x_0, x_1])$ e tale che: $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = 0$, ed ε è una variabile reale. Con questa scelta di u la (5.2) diventa:

$$J(\bar{u}) \le J(\bar{u} + \varepsilon\varphi)\,, \quad \forall \varepsilon \in]-\infty, +\infty[\,. \tag{5.3}$$

Ora il secondo membro della (5.3) si può riguardare come una funzione reale, della variabile reale ε, definita in $]-\infty, +\infty[$; funzione che per $\varepsilon = 0$ assume il valore $J(\bar{u})$. Posto allora, per ogni $\varepsilon \in]-\infty, +\infty[$,

$$F(\varepsilon) = J(\bar{u} + \varepsilon\varphi) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, \bar{u}(x) + \varepsilon\varphi(x), \bar{u}'(x) + \varepsilon\varphi'(x))\, dx\,, \tag{5.4}$$

la (5.3) assicura che: $F(0) \le F(\varepsilon)$, per ogni $\varepsilon \in]-\infty, +\infty[$. La funzione $F(\varepsilon)$ ha quindi un minimo (assoluto) per $\varepsilon = 0$. Poiché $F(\varepsilon)$ è derivabile nel punto 0, per il teorema di Fermat sui massimi e minimi, si ha:

$$F'(0) = 0\,. \tag{5.5}$$

D'altra parte, applicando alla funzione $F(\varepsilon)$ la regola di derivazione sotto il segno di integrale, risulta, per ogni $\varepsilon \in]-\infty, +\infty[$:

$$\begin{aligned} &F'(\varepsilon) = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} [f_u(x, \bar{u}(x) + \varepsilon\varphi(x), \bar{u}'(x) + \varepsilon\varphi'(x))\varphi(x) + f_{u'}(x, \bar{u}(x) + \varepsilon\varphi(x), \bar{u}'(x) + \varepsilon\varphi'(x))\varphi'(x)]\, dx\,, \end{aligned} \tag{5.6}$$

dove f_u ed $f_{u'}$ denotano le derivate parziali prime della funzione $f(x, u, u')$ rispetto alla seconda ed alla terza variabile.

Dalle (5.5) e (5.6) si ottiene ovviamente che

$$\int_{x_0}^{x_1} [f_u(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x))\varphi(x) + f_{u'}(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x))\varphi'(x)]\,dx = 0\,. \tag{5.7}$$

È infine chiaro che, per l'arbitrarietà di φ, la (5.7) varrà per ogni $\varphi \in C^1([x_0,x_1])$, con $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = 0$.
Con tecnica perfettamente analoga, è possibile pervenire alla (5.7) anche nell'ipotesi: $\bar{u}$ massimo per J [11].
Abbiamo così provato questa *prima condizione necessaria* per estremanti del funzionale J:

Teorema 5.1. *Se $\bar{u} \in \mathcal{F}$ è un estremante per l'integrale J, allora risulta*:

$$\int_{x_0}^{x_1} [f_u(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x))\varphi(x) + f_{u'}(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x))\varphi'(x)]\,dx = 0\,,$$

per ogni $\varphi \in C^1([x_0,x_1])$, con $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = 0$.

Osservazione 5.1. Per ogni fissata $u \in \mathcal{F}$, il funzionale (lineare) in φ:

$$\varphi \to J'(u)(\varphi) = \int_{x_0}^{x_1} [f_u(x,u(x),u'(x))\varphi(x) + f_{u'}(x,u(x),u'(x))\varphi'(x)]\,dx\,,$$

definito nello spazio (lineare) $\mathcal{U}$ delle $\varphi \in C^1([x_0,x_1])$ tali che: $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = 0$, prende il nome di *variazione prima* di J in u e si indica anche con il simbolo $\delta J(u)(\varphi)$ o, più semplicemente, con $\delta J(u)$. I punti $u \in \mathcal{F}$ per cui si ha: $\delta J(u) \equiv 0$ si chiamano *punti stazionari o critici per* J.
Con questa terminologia, il teorema 5.1 si può così enunciare.
Se $\bar{u} \in \mathcal{F}$ è un estremante per l'integrale J, allora $J'(\bar{u}) \equiv 0$, cioé $\bar{u}$ è un punto stazionario per J.
Il teorema 5.1 scritto in questa forma appare l'analogo del teorema di Fermat sui massimi e minimi delle funzioni derivabili.

Manipolando opportunamente l'integrale che figura al primo membro della (5.7), si può provare questa *seconda condizione necessaria* per estremanti del funzionale J:

Teorema 5.2. *Se $\bar{u} \in \mathcal{F}$ è un estremante per l'integrale J, allora $\bar{u}$ è estremale per J, cioé $\bar{u}$ è soluzione in $[x_0,x_1]$ dell'equazione differenziale di Eulero*:

$$\frac{d}{dx} f_{u'}(x,u,u') = f_u(x,u,u')\,. \tag{5.8}$$

Infatti, se $\bar{u} \in \mathcal{F}$ è un estremante per J, allora, per il teorema 5.1, si ha:

$$\int_{x_0}^{x_1} [f_u(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x))\varphi(x) + f_{u'}(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x))\varphi'(x)]\,dx = 0\,, \tag{5.9}$$

per ogni $\varphi \in C^1([x_0,x_1])$, con $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = 0$.
Posto ora, per ogni $x \in [x_0,x_1]$, $A(x) = \int_{x_0}^{x} f_u(t,\bar{u}(t),\bar{u}'(t))\,dt$, per il teorema di Torricelli sulla derivazione della funzione integrale, risulta:

$$A'(x) = f_u(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x))\,, \quad \forall x \in [x_0,x_1]\,,$$

quindi nella (5.9) l'integrale del primo addendo della funzione integranda si può così scrivere:

$$\int_{x_0}^{x_1} f_u(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x))\varphi(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} A'(x)\varphi(x)\,dx\,,$$

[11] L'equazione nell'incognita u:

$$\int_{x_0}^{x_1} [f_u(x,u,u')\varphi + f_{u'}(x,u,u')\varphi']\,dx = 0\,, \quad \varphi \in C^1([x_0,x_1])\,,\ \varphi(x_0) = \varphi(x_1) = 0\,,$$

prende il nome di *equazione di Eulero (o di Eulero-Lagrange) in forma integrale.*

da cui, integrando per parti, segue:

$$\int_{x_0}^{x_1} f_u(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x))\varphi(x)\,dx = [A(x)\varphi(x)]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} A(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{x_0}^{x_1} A(x)\varphi'(x)\,dx\,,$$

essendo $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = 0$.
La (5.9) assume allora la forma:

$$\int_{x_0}^{x_1} [-A(x) + f_{u'}(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x))]\varphi'(x)\,dx = 0\,, \tag{5.10}$$

per ogni $\varphi \in C^1([x_0,x_1])$, con $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = 0$.
Ora, grazie ad un noto lemma di CdV [12], si può affermare che la funzione che nell'integrale (5.10) moltiplica $\varphi'(x)$ è costante in $[x_0,x_1]$, cioé esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che:

$$-A(x) + f_{u'}(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x)) = c\,, \quad \forall x \in [x_0,x_1]\,,$$

da cui, ricordando l'espressione di $A(x)$, segue:

$$f_{u'}(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x)) = c + \int_{x_0}^{x} f_u(t,\bar{u}(t),\bar{u}'(t))\,dt\,, \quad \forall x \in [x_0,x_1]\,.$$

Dunque, facendo ancora uso del teorema di Torricelli, si ha, per ogni $x \in [x_0,x_1]$:

$$\frac{d}{dx} f_{u'}(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x)) = f_u(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x))\,,$$

che assicura la tesi.

Osservazione 5.2. Osserviamo esplicitamente che se alle ipotesi fatte su f si aggiungono le seguenti: $f \in C^2([x_0,x_1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, $f_{u'u'} \neq 0$, allora l'equazione di Eulero (5.8) è equivalente alla seguente equazione differenziale ordinaria del secondo ordine:

$$f_u(x,u,u') - f_{u'x}(x,u,u') - f_{u'u}(x,u,u')u' - f_{u'u'}(x,u,u')u'' = 0\,. \tag{5.11}$$

Il teorema 5.2 è molto utile nelle applicazioni perché ci dice che le estremanti per J vanno cercate tra le estremali. Queste ultime funzioni sono quindi "candidate" ad essere estremanti per l'integrale J. In molti casi, considerazioni geometriche o fisiche oppure il cosiddetto *metodo diretto* del CdV indicano che esiste il minimo (o il massimo) del funzionale J; se in questi casi esiste in $\mathcal{F}$ un'unica estremale, questa deve necessariamente essere la minimante (o la massimante) per J.
Così, ad esempio, è stato visto che la soluzione del problema della brachistocrona è il minimo dell'integrale (2.7):

$$T(u) = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+u'^2(x)}{v_0^2 + 2gu(x)}}\,dx\,,$$

al variare di u nella famiglia $\mathcal{F}$ delle funzioni reali u di classe C^1 in $[0,x_1]$, con $u(0) = 0$ e $u(x_1) = y_1$. In questo caso l'equazione differenziale (5.11) (equivalente all'equazione di Eulero) è:

$$\frac{1}{\sqrt{v_0^2+2gu}\,\sqrt{1+u'^2}}\Big[\frac{g}{v_0^2+2gu} + \frac{u''}{1+u'^2}\Big] = 0\,.$$

[12]**Lemma**. *Se $v \in C^0([x_0,x_1])$ è tale che:*

$$\int_{x_0}^{x_1} v(x)\varphi'(x)\,dx = 0\,,$$

per ogni $\varphi \in C^1([x_0,x_1])$, con $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = 0$, allora $v(x)$ è costante in $[x_0,x_1]$.

Moltiplicando primo e secondo membro per u', si ha:

$$\frac{u'}{\sqrt{v_0^2+2gu}\,\sqrt{1+u'^2}}\Big[\frac{g}{v_0^2+2gu}+\frac{u''}{1+u'^2}\Big]=\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{v_0^2+2gu}\,\sqrt{1+u'^2}}=0$$

e quindi

$$\frac{1}{\sqrt{v_0^2+2gu}\,\sqrt{1+u'^2}}=c \quad (c \text{ costante arbitraria})\,.$$

Le soluzioni di quest'ultima equazione differenziale individuano una famiglia di cicloidi, generate da un punto della circonferenza di raggio $r=\frac{1}{4gc^2}$ che rotola sulla retta $y=\frac{-v_0^2}{4g}$. Imponendo le condizioni di passaggio per $(0,0)$ e (x_1,y_1) si trova un'unica cicloide, che è la soluzione cercata (vedi, ad esempio, C.D. Pagani - S. Salsa [27]).

I risultati enunciati per i funzionali (5.1):

$$J(u)=\int_{x_0}^{x_1} f(x,u,u')\,dx\,,$$

con $u:[x_0,x_1]\to\mathbb{R}$, $f:[x_0,x_1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, si possono estendere, con dimostrazioni pressoché identiche, a quelli del tipo:

$$J(u)=J(u_1,u_2,\dots,u_n)=\int_{x_0}^{x_1} f(x,u_1,u_2,\dots,u_n,u_1',u_2',\dots,u_n')\,dx\,,$$

dove $u=(u_1,u_2,\dots,u_n):[x_0,x_1]\to\mathbb{R}^n$ e $f:[x_0,x_1]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ [13]; per questi funzionali l'equazione di Eulero (5.8) va sostituita con il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{d}{dx}f_{u_j'}(x,u,u')=f_{u_j}(x,u,u')\,,\qquad j=1,2,\dots,n\,.$$

L'equazione di Eulero associata agli integrali multipli del CdV, cioé ai funzionali del tipo:

$$J(u)=\int_\Omega f(x,u,Du)\,dx=\int_\Omega f(x_1,x_2,\dots,x_n,u,u_{x_1},u_{x_2},\dots,u_{x_n})\,dx\,,$$

è invece l'equazione differenziale alle derivate parziali seguente:

$$\text{(5.12)}\qquad \sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}f_{u_{x_j}}(x,u,Du)=f_u(x,u,Du)\,,\qquad Du=(u_{x_1},u_{x_2},\dots,u_{x_n})\,.$$

In particolare, l'equazione di Eulero dell'integrale (di Dirichlet):

$$V(u)=\frac{1}{2}\tau\iint_\Omega(u_x^2+u_y^2)\,dxdy$$

si riduce a: $\tau\Delta u=0$, dove Δ è l'*operatore di Laplace*: $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$.
In questo caso, infatti, essendo $f(x,y,u,u_x,u_y)=\frac{1}{2}\tau(u_x^2+u_y^2)$, si ha: $f_u=0$, $f_{u_x}=\tau u_x$, $f_{u_y}=\tau u_y$; la (5.12) ha quindi l'espressione: $\frac{\partial}{\partial x}(\tau u_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\tau u_y)=0$, che si può anche scrivere nella forma: $\tau\Delta u=0$.
Dunque, una funzione $\bar{u}\in C^2(\overline{\Omega})$ estremante per il problema della membrana elastica deve necessariamente essere soluzione del seguente *problema di Dirichlet*:

$$\begin{cases}\Delta u=0 & \text{in } \Omega\\ u=\varphi & \text{su } \partial\Omega.\end{cases}$$

[13]Questo è il caso del problema degli isoperimetri e di quello geodetico piano in cui le curve congiungenti A con B sono date in forma parametrica.

Nell'Ottocento rilevanti contributi al CdV furono apportati da Adrien-Marie Legendre (1752–1833), Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), Karl Weierstrass (1815-1897). In particolare, Legendre, guidato dal fatto che nel calcolo ordinario il segno della derivata seconda di una funzione reale F in un punto x, in cui si annulla la derivata prima (punto stazionario o critico), determina se x è massimo o minimo per F ed utilizzando la variazione seconda:

$$J''(u)(\varphi) = \delta^2 J(u)(\varphi) = \\ = \int_{x_0}^{x_1} [f_{uu}(x,u,u')\varphi^2 + 2f_{u'u}(x,u,u')\varphi\varphi' + f_{u'u'}(x,u,u')\varphi'^2]\,dx\,, \quad \varphi \in \mathcal{U}\,,$$

di $J(u) = \int_{x_0}^{x_1} f(x,u,u')\,dx$ in luogo della derivata seconda, F'', di F riuscì a dimostrare che *condizione necessaria affinché la funzione ammissibile $\bar{u}$ massimizzi (o minimizzi) il funzionale J è che $\bar{u}$ soddisfi l'equazione di Eulero* (5.8) *e verifichi la condizione*:

$$f_{u'u'}(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x)) \leq 0 \quad (\geq 0)\,,$$

per ogni $x \in [x_0, x_1]$. Restrinse così il "campo" in cui cercare gli estremi del funzionale J. Jacobi invece, facendo uso del concetto di *punto coniugato*, riuscì a raffinare la condizione di Legendre in modo da farla diventare una condizione sufficiente.
Marie-Sophie Germain (1776-1831), Siméon-Denis Poisson (1781-1840) e William Rowan Hamilton (1805-1865) applicarono i metodi del CdV alla risoluzione di svariati problemi di elasticità e di dinamica classica.

6 Leonida Tonelli e il metodo diretto del CdV.

I teoremi visti nel n. 5 sono i primi, più semplici risultati del CdV. Questi metodi vennero chiamati dal matematico italiano Leonida Tonelli i *metodi classici (o indiretti)* del CdV per distinguerli dal *metodo diretto*, da lui studiato sistematicamente. Va osservato che la teoria delle equazioni differenziali, a cui i metodi classici riconducono i problemi di minimo o di massimo dei funzionali da studiare, non è in grado di dare sempre al CdV quell'aiuto che ad esso occorrerebbe, particolarmente per quanto riguarda il problema esistenziale. Per ovviare a queste deficienze è nato il metodo diretto del CdV. Questo metodo consiste nel dimostrare l'esistenza del minimo o del massimo di un funzionale $J(u)$ direttamente, cioé senza passare attraverso l'equazione di Eulero di J, ma mediante teoremi quale quello di Weierstrass, che, come è noto, dà per le funzioni reali di una o più variabili reali l'esistenza di punti di minimo e di massimo.

Il matematico tedesco David Hilbert (1862-1943), considerato alla fine dell'Ottocento una delle "punte di diamante" della ricerca matematica, fu il primo a risolvere un problema variazionale con metodo diretto: riuscì a dare dimostrazione completa dell'esistenza del minimo dell'integrale di Dirichlet nella classe delle funzioni che assumono valori prescritti sul contorno di una regione Ω, assicurando così l'esistenza di una soluzione del problema al contorno di Dirichlet [14].
Al Congresso internazionale dei matematici di Parigi del 1900, Hilbert propose 23 rilevanti problemi matematici irrisolti, auspicandone la risoluzione nel corso del XX secolo. Tre di questi riguardano il CdV: uno, il XXIII, è legato agli sviluppi del CdV classico, gli altri due, il XIX ed il XX, sono la formulazione di quelli che successivamente verranno chiamati i metodi diretti nel CdV. La sfida lanciata da Hilbert con questi due ultimi problemi verrà raccolta dai matematici italiani Leonida Tonelli ed Ennio De Giorgi (1928–1996).

Leonida Tonelli era nato a Gallipoli (Lecce) il 19 aprile 1885 e si era laureato a Bologna nel 1907 discutendo con Cesare Arzelà (1847-1912) una tesi sui polinomi di approssimazione di Tchebychev. Nel 1913 fu chiamato a Cagliari alla cattedra di Analisi algebrica di quella università e

[14] Sui contributi di Hilbert al CdV vedasi M. Giaquinta [13].

l'anno dopo a Parma. Dopo la Grande Guerra, nel 1922, si trasferì a Bologna e, otto anni dopo, a Pisa.

Il Tonelli iniziò gli studi sui Metodi diretti del CdV nel 1911 e li illustrò dettagliatamente nel trattato *Fondamenti di calcolo delle variazioni* pubblicato in due volumi (vedi [32]). Il primo volume fu dato alle stampe nel 1921, subito dopo la fine del Primo conflitto mondiale. ≪*Libro lungamente pensato nelle oscure notti della trincea*≫: così il Tonelli scrisse sulla copia che nel 1926 offrì alla allora sua fidanzata, e, dal 1927, sua consorte.

La partecipazione del Tonelli a questo conflitto è abbastanza singolare. Così scrive in proposito Francesco Cecioni (1884–1968) nel suo discorso pronunciato alla celebrazione commemorativa di Leonida Tonelli, nel primo anniversario della scomparsa (vedi [1]): ≪*Egli era stato dichiarato inabile al servizio militare; una nuova visita medica non poteva che confermare almeno l'inabilità al servizio di guerra; quindi l'esonero* [...]; *potrebbe perciò rimanere alla Sua vita quieta ed alla Sua scienza, nella quale già è celebre; ed il Suo temperamento non è, in sostanza, avventuroso. Ma il Suo carattere non Gli rende accettabile questa soluzione. Si sottopone ad una operazione chirurgica per potere essere idoneo incondizionatamente; ed appena è possibile fa domanda di essere nominato Ufficiale. Fece la guerra seriamente e con valore, rinunciando anche a congedi invernali che il Rettore dell'Università di Parma Gli sollecitava. Dall'artiglieria da fortezza chiese ed ottenne di passare a quella da montagna, arma più esposta ai pericoli*≫.

Alfeo Liporesi, che fu amico del Tonelli e assiduo frequentatore del Circolo di Cultura di Bologna, di cui Tonelli era consigliere, in una lettera del 20 febbraio 1947 inviata alla Signora Tonelli, che si era a Lui rivolta per avere ricordi personali del marito, così ricorda il passaggio di Tonelli dall'Università di Bologna a quella di Pisa (vedi ancora [1]). ≪*Credo di rammentare che eravamo sul finire dell'estate del 1929 o '30,* - dice Liporesi – *quando una notte, uscendo dal Circolo, mi disse in tutta confidenza che il Ministero Gli aveva proposto, a mezzo di Giovanni Gentile, di passare all'Università di Pisa per assumere nella famosa Scuola Normale la direzione del Seminario di Matematica; ma che Egli preferiva non muoversi, perché Gli spiaceva molto lasciare Bologna, che, sostanzialmente, era la Sua città, dove aveva compiuto gli studi, dove allora copriva la cattedra dei Suoi maestri e contava le Sue migliori amicizie.* [...] *Egli aggiunse* [...] *che avrebbe parlato con Gentile, che lo avrebbe informato come Egli fosse stato uno dei firmatari del famoso "Manifesto degli intellettuali" avverso al fascismo e come non fosse inscritto e non intendesse inscriversi al partito fascista, in quanto Egli rimaneva pur sempre sindacalista* [...]. *Da questa leale messa a punto, Egli si attendeva o il ritiro della proposta fattaGli - e quindi la Sua permanenza a Bologna –, o la reiterazione della medesima - e quindi l'ingresso senza equivoci alla Scuola Normale.* [...] *Di lì a qualche tempo, altra notturna conferenza peripatetica. Aveva parlato con Gentile, nulla occultando, con cuore veramente aperto, quasi con brutale schiettezza. Il filosofo, che molte cose già sapeva* [...] *Lo aveva ascoltato attentamente, con evidenza di comprensione e di favorevole apprezzamento.* [...] *Però, evidentemente preoccupato della responsabilità che stava per assumersi, proponendo alla Scuola Normale un "eretico" di tal fatta, Gentile promise che ne avrebbe parlato a Mussolini. E gliene parlò, infatti, nulla trascurando di quanto Tonelli gli aveva confidato. Mussolini - come riferì Gentile a Tonelli, e questi a me - ascoltò tutto con interesse e conchiuse domandando bruscamente: "Ma sa la matematica?" E, alla risposta abbondantemente affermativa di Gentile, concluse: "La matematica non ha opinioni politiche", dando così il suo assenso all'assunzione del Tonelli alla Scuola Normale*≫.

Il Tonelli si trasferì a Pisa nell'autunno del 1930 a ricoprire all'Università la cattedra di Calcolo infinitesimale, vacante per la morte di Onorato Nicoletti (1872-1929), e a dirigere gli studi e gli *Annali* della Scuola Normale. Tra gli allievi di quel periodo ebbe Giovanni Dantoni (1909-2005), che, come molti ricorderanno, fu docente di Geometria presso il nostro Ateneo e preside della Facoltà di Scienze matematiche, fisiche e naturali dal 1965 al 1973.

Leonida Tonelli morì a Pisa il 12 marzo 1946; il suo corpo dorme oggi nel Camposanto monumentale di Pisa, accanto a quelli di altri insigni Maestri della Scuola matematica pisana.

Ritorniamo al CdV. È stato più volte detto che con il nome di "metodi diretti" del CdV si intendono le tecniche intese a dimostrare l'esistenza degli estremi dei funzionali del CdV, che evitano di coin-

volgere equazioni differenziali. La scuola italiana, scaturita principalmente dalle idee di Tonelli, si propose, come già accennato, di costruire, facendo uso degli strumenti dell'analisi funzionale, una teoria dei massimi e minimi per i funzionali del CdV che fosse la più analoga possibile a quella dei massimi e minimi delle funzioni reali di una o più variabili reali nell'ordinario calcolo differenziale. L'obiettivo era cioé quello di determinare una generalizzazione del teorema di Weierstrass che fosse utile a provare l'esistenza dei massimi e minimi per i funzionali del CdV.
Chiariamo meglio questi concetti in termini matematici.
Il teorema di Weierstrass, come è noto, afferma che *se U è un sottoinsieme chiuso e limitato dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) e se $J(u)$ è una funzione reale continua in U, allora $J(u)$ è dotata in U di minimo e di massimo.*
Ora è altresì noto che

i) i sottoinsiemi U chiusi e limitati di $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli quelli *sequenzialmente compatti*, cioé tali che da ogni successione $\{u_n\}$ di elementi di U se ne può estrarre una, $\{u_{k_n}\}$, convergente ad un elemento u di U;

ii) le funzioni reali $J(u)$ continue in $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sono tutte e sole quelle *sequenzialmente continue* in U, cioé tali che, per ogni $u \in U$ e per ogni successione $\{u_n\}$ di elementi di U convergente a u, si ha: $\lim_{n\to\infty} J(u_n) = J(u)$, o equivalentemente, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che:

$$J(u) - \varepsilon < J(u_n) < J(u) + \varepsilon\,, \quad \forall n > \nu_\varepsilon\,. \tag{6.1}$$

Il teorema di Weierstrass si può allora così enunciare: *se U è un sottoinsieme sequenzialmente compatto dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) e se $J(u)$ è una funzione reale sequenzialmente continua in U, allora $J(u)$ è dotata in U di minimo e di massimo.*
Il teorema di Weierstrass enunciato sotto questa forma, si presta alla generalizzazione agli spazi metrici, quali sono gli spazi funzionali in cui sono definiti gli integrali del CdV. Si dimostra cioé la seguente generalizzazione:

Teorema 6.1. *Sia $\mathcal{F}$ uno spazio metrico e sia U un sottoinsieme sequenzialmente compatto di $\mathcal{F}$. Se $J(u)$ è una funzione reale sequenzialmente continua in U, allora $J(u)$ è dotata in U di minimo e di massimo.*

Questo teorema, che continueremo a chiamare teorema di Weierstrass, è molto generale: lo si può applicare ai funzionali J del CdV, a condizione però che siano essi sequenzialmente continui in $U \subseteq \mathcal{F}$. Sfortunatamente, i funzionali del CdV, nella stragrande maggioranza dei casi, non sono sequenzialmente continui in U; occorrerà pertanto riscrivere il teorema 6.1 indebolendo l'ipotesi di continuità. A tal proposito, osserviamo che per dimostrare l'esistenza del minimo in U di J si sfrutta *solo* la prima delle maggiorazioni (6.1); si sfrutta invece la seconda delle (6.1) per dimostrare l'esistenza del massimo.
Il matematico francese René Baire (1874-1932) fu il primo a cogliere l'importanza di questa osservazione e ad introdurre, nel 1899, i concetti di sequenziale semicontinuità inferiore e superiore per J.
Grazie a questi nuovi concetti il teorema 6.1 si può così generalizzare:

Teorema 6.2 (di Baire). *Sia $\mathcal{F}$ uno spazio metrico e sia U un sottoinsieme sequenzialmente compatto di $\mathcal{F}$. Se $J(u)$ è una funzione reale sequenzialmente semicontinua inferiormente (superiormente) in U, allora $J(u)$ è dotata in U di minimo (massimo).*

La dimostrazione di questo teorema è semplice. Supponiamo, per fissare le idee, che $J : U \to \mathbb{R}$ sia sequenzialmente semicontinua inferiormente in U e proviamo che esiste in U un punto di minimo per $J(u)$. Le proprietà dell'estremo inferiore l di $J(U)$ assicurano che esiste in U una successione $\{u_n\}$ *minimizzante* $J(u)$, cioé tale che:

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = l\,. \tag{6.2}$$

Ora, essendo U un sottoinsieme sequenzialmente compatto di $\mathcal{F}$, da $\{u_n\}$ è possibile estrarre una successione $\{u_{k_n}\}$ convergente in $\mathcal{F}$ ad un elemento $\bar{u} \in U$. È immediato provare che $\bar{u}$ è un punto di minimo per $J(u)$. Infatti, per l'ipotesi di sequenziale semicontinuità inferiore di J in $\bar{u}$, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che: $J(\bar{u}) - \varepsilon < J(u_{k_n})$, per ogni $n > \nu_\varepsilon$, quindi, passando al limite per $n \to \infty$ e facendo uso della (6.2), risulta: $J(\bar{u}) - \varepsilon \leq l$, per ogni $\varepsilon > 0$. L'arbitrarietà di ε assicura allora che $J(\bar{u}) \leq l$, da cui segue che l è finito e che $J(\bar{u}) = l$.

Il metodo diretto di Leonida Tonelli per la ricerca dei minimi e dei massimi degli integrali del CdV è basato su questo teorema di Baire o fa uso della sua tecnica dimostrativa. Il concetto di convergenza usato da Tonelli nella famiglia U delle funzioni ammissibili è quello di *convergenza uniforme* e U è la classe delle funzioni *assolutamente continue*.
Per provare allora l'esistenza del minimo (o del massimo) dell'integrale

$$J(u) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, u(x), u'(x))\, dx$$

nella famiglia U delle funzioni ammissibili, occorre dimostrare che:

1) il funzionale $J(u) : U \to \mathbb{R}$ è sequenzialmente semicontinuo inferiormente (superiormente) in U;

2) esiste in U una successione $\{u_n\}$ minimizzante (massimizzante) il funzionale J la quale è compatta rispetto alla convergenza uniforme;

3) il punto limite di $\{u_n\}$ appartiene ad U.

Furono diversi i teoremi dimostrati da Tonelli fra il 1911 ed il 1934 per conseguire gli obiettivi 1)–3). In particolare, provò che $J(u)$ è sequenzialmente semicontinuo inferiormente in U se $f(x, u, u')$ è, per ogni $(x, u) \in [x_0, x_1] \times \mathbb{R}$, una funzione convessa di u' e che la compattezza di una successione minimizzante, $\{u_n\}$, rispetto alla convergenza uniforme, è assicurata se le $|u_n|$ sono equilimitate ed esistono tre costanti c_0, c_1 e α, con c_0 e α positive, tali che, in $[x_0, x_1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, si abbia: $f(x, u, u') \geq c_0 |u'|^{1+\alpha} + c_1$.
I risultati ottenuti da Tonelli permisero di stabilire l'esistenza dei minimi e dei massimi dei funzionali del CdV che si presentano come integrali *semplici* dipendenti da funzioni reali $u(x)$ di una variabile reale x oppure da funzioni $u(x) = (u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x))$, di una variabile reale x, a valori in $\mathbb{R}^n$.
In una seconda fase il Tonelli si volse allo studio delle proprietà analitiche delle estremanti, attraverso l'esame della variazione prima, estendendo, tra l'altro, la condizione di Eulero. Da questi studi e dai teoremi di esistenza delle estremanti, egli ottenne teoremi di esistenza delle soluzioni di molte e notevoli equazioni differenziali [15]. Il metodo diretto del CdV ha potuto pertanto portare aiuto alla teoria delle equazioni differenziali, mentre il metodo classico doveva, viceversa, ricorrere ad essa [16].

[15] I risultati di Tonelli sul CdV sono reperibili, oltre che in [32], nei volumi II e III delle *Opere scelte* di Leonida Tonelli, curate dall'Unione Matematica Italiana (cfr. [33] e [34]). In particolare, in [33] sono riuniti tutti i lavori di CdV apparsi tra il 1911 e il 1924, mentre in [34] sono raccolti quelli pubblicati dal 1926 in poi, "contenenti risultati del tutto nuovi in confronto a quelli che figurano nei *Fondamenti di Calcolo delle variazioni*, la cui pubblicazione era terminata nel 1923".

[16] In quest'ordine di idee il primo problema che si pone è quello di determinare il funzionale del CdV la cui equazione di Eulero coincide con quella da studiare. Ad esempio, se l'equazione differenziale da studiare è del tipo: $u'' = F(x, u, u')$, si può procedere formalmente in questo modo: affinché questa equazione differenziale sia l'equazione di Eulero per un funzionale del tipo: $J(u) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, u, u')\, dx$, occorre che coincida con l'equazione (5.11):

$$f_u - f_{u'x} - f_{u'u}u' - f_{u'u'}u'' = 0\,;$$

deve cioé valere l'identità in x, u, u': $f_u - f_{u'x} - f_{u'u}u' - f_{u'u'}F = 0$. Differenziando ora rispetto a u', si ottiene: $f_{u'u'x} + f_{u'u'u}u' + f_{u'u'u'}F + f_{u'u'}F_{u'} = 0$; che può essere considerata un'equazione differenziale lineare alle derivate

Gaetano Fichera (1922-1996), nella sua conferenza dal titolo: *La matematica italiana tra le due guerre mondiali*, tenuta presso questa accademia nel giugno 1988 e pubblicata negli *Atti* di quell'anno (vedi [11]), afferma: ≪*L'opera di Tonelli fece fare un "salto di qualità" al Calcolo delle variazioni ed essa spostò nel nostro Paese, nel periodo fra le due guerre, il baricentro di questo importante capitolo dell'Analisi. Ai risultati di Tonelli in questo campo vanno aggiunti quelli da lui ottenuti in campi limitrofi, riguardanti la rettificazione delle curve e la quadratura delle superficie.*≫
Successivamente Tonelli studiò gli integrali *multipli* del CdV, cercando di estendere ad essi la teoria da lui sviluppata per gli integrali semplici, senza riuscire però ad ottenere risultati soddisfacenti. Questa "battaglia" intrapresa da Tonelli è così illustrata da Gaetano Fichera nel suo scritto: *Tre battaglie perdute da tre grandi matematici italiani*, pubblicato negli Atti del Convegno di studi in memoria di Giuseppe Geminiani (Modena, 20 maggio 1994) (vedi [12]): ≪*Tonelli cercò di superare questa difficoltà battendosi eroicamente ed adoperando raffinati metodi per assicurare la compattezza di una successione minimizzante* [...]. *Egli usò il sofisticato "metodo di livellamento" ed altri ingegnosi strumenti per conseguire la "equi-continuità" delle funzioni di una successione minimizzante* $\{u_n\}$ *e quindi, con il classico teorema di Ascoli-Arzelà, la compattezza di* $\{u_n\}$ *rispetto alla convergenza uniforme. Ottenne risultati pregevoli* [...], *ma la battaglia era perduta, perché egli non pensò di fare la cosa che "oggi" ci appare la più naturale: cambiare il tipo di convergenza.*≫
A ciò pensò il matematico statunitense Charles Bradfield Morrey Jr. (1907-1987), che nello studio degli integrali multipli del CdV suppose l'insieme delle funzioni ammissibili contenuto in uno spazio di Sobolev $H^{1,p}(\Omega)$ ($p > 1$) ed assunse come convergenza la *convergenza debole* in $H^{1,p}(\Omega)$ (vedi [24], [25] e [26]). Con l'opera di Morrey il metodo diretto del CdV riprendeva il suo cammino ed i problemi esistenziali rimasti aperti trovavano soluzione.

7 Regolarità delle soluzioni dei problemi del CdV.

La risoluzione del problema dell'esistenza del minimo (o del massimo) per gli integrali multipli del CdV in spazi di Sobolev apriva però altre questioni. Le funzioni di questi spazi infatti sono derivabili solo *in senso debole*, e in generale non sono nemmeno continue. Una volta provata l'esistenza del minimo (massimo) in $H^{1,p}(\Omega)$, sorgeva il problema di vedere se questo minimo (massimo) è una funzione continua, derivabile, ecc., in breve, il *problema della regolarità* delle soluzioni.

Lo studio della regolarità delle soluzioni dei problemi del CdV è l'oggetto del XIX problema di Hilbert, in esso viene posta la domanda:
XIX Problema. *Sono le soluzioni dei problemi regolari del CdV sempre necessariamente analitiche?*
In altre parole, ci si chiede se ogni equazione differenziale a derivate parziali che è l'equazione di Eulero di un problema variazionale regolare, cioé del tipo: $\iint_\Omega f(x, y, u, u_x, u_y)\, dxdy = \min$ (max), con f analitica, ha la proprietà di ammettere esclusivamente soluzioni analitiche.
Fu Guido Stampacchia (1922-1978), nell'agosto del 1955, durante una gita in montagna, a segnalare al giovane Ennio De Giorgi il XIX Problema di Hilbert. Meno di due mesi dopo, De Giorgi risolveva positivamente la questione (vedi [5] e [6]), ottenendo il suo celebre risultato sulla regolarità hölderiana delle soluzioni delle equazioni lineari ellittiche del secondo ordine, in forma di

parziali nella funzione incognita $y = f_{u'u'}$, cioé

$$\frac{\partial y}{\partial x} + u' \frac{\partial y}{\partial u} + F \frac{\partial y}{\partial u'} + F_{u'} y = 0 \,.$$

Così per determinare la funzione integranda f, e quindi il funzionale J, occorrerà integrare questa equazione (che dà $f_{u'u'}$) e poi quadrare due volte (vedi G. Talenti [31]).

divergenza:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{i,j}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) = 0\,, \quad n \text{ intero } \geq 2\,,\ x = (x_1, x_2, ..., x_n)\,,$$

con coefficienti $a_{i,j}$ misurabili e limitati (dunque anche discontinui) e verificanti la condizione di ellitticità:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j > \nu|\xi|^2\,, \quad \nu > 0\,.$$

Ennio De Giorgi si occupò anche di *superficie di area minima*: altro argomento trattato dal CdV, che risale alle fasi iniziali di questa teoria ma che passò successivamente sotto silenzio, fino a quando nel 1873 il fisico belga Joseph Antoine Ferdinand Plateau (1801–1883) pubblicò, nel trattato *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires* [29], i risultati di quindici anni di ricerche sulle forze molecolari. Plateau arrivò a scoprire che se si immerge in acqua saponata un filo avente la forma di una curva chiusa, quando lo si estrae rimane ad esso attaccata una bolla di sapone avente la forma della superficie di area minima che ha quella curva come contorno. Le bolle di sapone forniscono dunque una soluzione empirica dell'esistenza di una superficie di area minima avente per contorno una qualunque curva chiusa dello spazio.
Naturalmente, se per i fisici poteva essere sufficiente avere una dimostrazione di questo tipo, non lo era per i matematici, che si proposero di risolvere teoricamente il problema, noto oggi come *problema di Plateau*, dell'esistenza, per ogni curva chiusa dello spazio, di una superficie minimale avente la curva per contorno, determinandone successivamente la regolarità e, se possibile, l'espressione analitica esplicita.
La soluzione dovette attendere quasi un secolo e fu data nel 1931 da Jesse Douglas (1897-1965) nel suo lavoro dal titolo: *Solution of the problem of Plateau* [8], e contemporaneamente ed indipendentemente dal matematico ungherese Tibor Radò (1895-1965).
Per i suoi lavori sulle superficie minime Douglas ottenne nel 1936 la (prima) *medaglia Fields*, il più alto riconoscimento per un matematico, che viene assegnata ogni quattro anni in occasione del Congresso internazionale dei matematici. Nel 1974 anche il matematico italiano Enrico Bombieri ottenne la medaglia Fields, sempre per lavori sulle superficie di area minima.
Al fine di risolvere le questioni ancora aperte, legate alla formazione di spigoli liquidi nelle superficie saponose, all'inizio degli anni Sessanta del secolo scorso Ennio De Giorgi [7] e Ernst R. Reifenberg [30] introdussero un approccio completamente nuovo al problema di Plateau. L'idea fu quella di generalizzare i concetti di superficie, di area e di contorno per arrivare ad ottenere soluzioni generali [17].
Ad Ennio De Giorgi venne attribuito nel 1990 il *premio Wolf* del Presidente della Repubblica d'Israele, "per le sue idee innovative e i suoi risultati fondamentali nel campo delle equazioni alle derivate parziali e del CdV" [18].
Nel 1968 Morrey, riprendendo le idee introdotte da De Giorgi e sviluppate da Frederick Justin Almgren Jr. (1933–1997) per lo studio delle superficie minime, otteneva la *regolarità parziale* delle soluzioni deboli di sistemi ellittici non lineari, cioé la regolarità in un aperto $\Omega_0 \subset \Omega$, con l'*insieme singolare* $\Omega \setminus \Omega_0$ di misura nulla. Il risultato di Morrey fu ripreso ed ampliato dai matematici pisani Enrico Giusti, Mario Miranda, Mariano Giaquinta, Sergio Campanato (1930–2005). In particolare, Campanato introdusse quelli che oggi vanno sotto il nome di *spazi di Campanato*, che generalizzano gli *spazi di Morrey*, e provò in essi la regolarità, in maniera particolarmente elegante (vedi [4]).
In questo filone di ricerche, riguardante la regolarità e la regolarità parziale delle *soluzioni deboli* delle equazioni e dei sistemi di equazioni differenziali a derivate parziali, sin dalla fine degli anni Settanta del secolo scorso, allorché iniziai la collaborazione con Sergio Campanato, hanno indagato analisti del nostro Ateneo, in collaborazione con colleghi delle università di Messina e di Reggio

[17] Articoli divulgativi sul problema delle "bolle di sapone" trovansi in [9].
[18] Sui contributi di Ennio De Giorgi al CdV vedasi anche E. Giusti [17].

Calabria: Mario Marino, Antonino Maugeri, Giuseppe Di Fazio, Maria Alessandra Ragusa, Maria Stella Fanciullo, Carmen Vitanza, Luisa Fattorusso, Giovanna Idone, per fare alcuni nomi.

In particolare, Mario Marino e Antonino Maugeri, in [22] [19], estendono, facendo uso della teoria degli spazi di Besov, un fondamentale risultato di interpolazione di Nirenberg agli spazi di Sobolev con esponenti frazionari, ottenendo, in particolare, il seguente

Teorema 7.1. *Siano N un intero positivo e $B(\sigma)$ un cubo di $\mathbb{R}^n$. Se*

$$u \in H^{1+\vartheta,r}(B(\sigma),\mathbb{R}^N) \cap C^{0,\lambda}(\overline{B(\sigma)},\mathbb{R}^N)\,,$$

con $0<\vartheta,\ \lambda<1$, $1<r<+\infty$, e se $n>\vartheta r$, allora, per ogni $\alpha \in \left]\frac{1-\lambda}{1-\lambda+\vartheta},1\right[$, risulta:

$$u \in H^{1,p}(B(\sigma),\mathbb{R}^N)\,,$$

dove $\frac{1}{p}=\frac{1}{n}+\alpha\left(\frac{1}{r}-\frac{1+\vartheta}{n}\right)-(1-\alpha)\frac{\lambda}{n}$. Esiste inoltre una costante positiva c (dipendente da ϑ, λ, r, σ, n, α) tale che:

$$\|u\|_{1,p,B(\sigma)} \le c\,\|u\|^{\alpha}_{1+\vartheta,r,B(\sigma)}\|u\|^{1-\alpha}_{C^{0,\lambda}(\overline{B(\sigma)},\mathbb{R}^N)}\,.$$

Da questo teorema è seguita una lunga serie di risultati di *regolarità differenziale* per le soluzioni deboli di sistemi di equazioni differenziali non lineari variazionali parabolici del secondo ordine e di ordine superiore, con non linearità dei coefficienti $q=2$ e $q\neq 2$. Il risultato più generale raggiunto su questo argomento, nel caso di non linearità $q\ge 2$, è dovuto a Luisa Fattorusso e Mario Marino, che in [10] studiano la differenziabilità delle soluzioni deboli in $Q=\Omega\times]-T,0[$ del sistema non lineare parabolico del secondo ordine in forma di divergenza:

$$-\sum_{j=1}^{n} D_j a^j(X,u,Du)+\frac{\partial u}{\partial t}=B^0(X,u,Du)\,,\quad X=(x,t)\in Q\,,$$

cioé delle soluzioni dell'equazione:

$$\int_Q\Big\{\sum_{j=1}^{n}(a^j(X,u,Du)|D_j\varphi)-\Big(u\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big)\Big\}\,dX = \tag{7.1}$$
$$=\int_Q (B^0(X,u,Du)|\varphi)\,dX\,,\quad \forall\varphi\in C_0^\infty(Q,\mathbb{R}^N)\,.$$

In particolare, nelle ipotesi seguenti: *esiste $q\ge 2$ tale che, posto:*

$$W(p,\bar p)=(1+\|p\|^2+\|\bar p\|^2)^{\frac12}\,,\quad V(p)=W(p,0)\quad (p,\bar p\in\mathbb{R}^{nN})\,,$$

(7.2) *per ogni $x\in\Omega$, $y\in B(x,\frac{1}{\sqrt2}d_x)$ ($d_x=\operatorname{dist}(\{x\},\partial\Omega)>0$), $t\in]-T,0[$, u, $v\in\mathbb{R}^N$ con $\|u\|$, $\|v\|\le K$, p, $\bar p\in\mathbb{R}^{nN}$, risulta:*

$$\|B^0(X,u,p)\|\le M(K)\,V^q(p)\,,$$
$$\|B^0(x,t,u,p)-B^0(y,t,v,p)\|\le M(K)(\|x-y\|+\|u-v\|)\,V^q(p)\,,$$
$$\|B^0(X,u,p)-B^0(X,u,\bar p)\|\le M(K)\|p-\bar p\|W^{q-1}(p,\bar p)\,;$$

(7.3) *per ogni $x\in\Omega$, $y\in B(x,\frac{1}{\sqrt2}d_x)$, $t\in]-T,0[$, u, $v\in\mathbb{R}^N$ con $\|u\|$, $\|v\|\le K$, $p\in\mathbb{R}^{nN}$, si ha:*

$$\|a(X,u,p)\|\le M(K)\,V^{q-1}(p)\,,$$
$$\|a(x,t,u,p)-a(y,t,v,p)\|\le M(K)(\|x-y\|+\|u-v\|)\,V^{q-1}(p)\,,$$

dove $a(X,u,p)$ denota il vettore di $\mathbb{R}^{nN}$: $(a^1(X,u,p)|a^2(X,u,p)|\dots|a^n(X,u,p))$;

[19] Vedi anche [23].

(7.4) *le applicazioni* $p \to a^j(X,u,p)$, $j = 1,2,\dots,n$, $(X,u) \in Q\times\mathbb{R}^N$, *sono strettamente monotone con non linearità* $q \geq 2$, *nel senso che esistono due costanti positive* $M(K)$ *e* $\nu(K)$ *tali che, per ogni* $(X,u) \in Q \times \mathbb{R}^N$, *con* $\|u\| \leq K$, *e per ogni* p, $\bar{p} \in \mathbb{R}^{nN}$, *risulta:*

$$\|a(X,u,p) - a(X,u,\bar{p})\| \leq M(K)\|p - \bar{p}\|W^{q-2}(p,\bar{p})\,,$$

$$\big(a(X,u,p) - a(X,u,\bar{p})\big|p - \bar{p}\big) \geq \nu(K)\|p - \bar{p}\|^2 W^{q-2}(p,\bar{p})\,,$$

dimostrano il seguente teorema di *differenziabilità all'interno*:

Teorema 7.2. *Se* $u \in L^q(-T,0,H^{1,q}(\Omega,\mathbb{R}^N)) \cap C^{0,\lambda}(\overline{Q},\mathbb{R}^N)$, $q \geq 2$, $0 < \lambda < 1$, *è una soluzione dell'equazione* (7.1), *allora, per ogni* $B(\sigma) \subset\subset \Omega$ *e per ogni* $a \in]0,T[$, *si ha:*

$$u \in L^2(-a,0,H^2(B(\sigma),\mathbb{R}^N))\,. \tag{7.5}$$

Inoltre, se $2 \leq q < \frac{6-4\lambda}{1-\lambda}$, *per ogni* $s \in [q+2, q+\frac{2}{1-\lambda}[$, *con* $s > 2(q-2)$, *risulta:*

$$u \in H^{1,r}(-a,0,L^r(B(\sigma),\mathbb{R}^N))\,, \tag{7.6}$$

dove $r = \frac{2s}{2q-4+s}$.

Osservazione 7.1. Resta aperto il problema dell'estensione del precedente risultato al caso di non linearità dei coefficienti (q',q), con $q' \leq q$. L'idea è quella di riottenere condizioni simili alle (7.5) e (7.6) sostituendo alle ipotesi (7.2), (7.3) e (7.4), in cui figura il solo esponente q, ipotesi più generali che coinvolgono le quantità q' e q.
Ovviamente questa generalizzazione, nel caso particolare $q' = q$, dovrebbe ridare il teorema 7.2.

Ancora oggi il CdV è in piena evoluzione ed, unitamente a *metodi numerici* e di *ottimizzazione*, è in grado di affrontare problemi di notevole complessità, come, ad esempio, quello della *ricostruzione e segmentazione delle immagini*, importante nelle telecomunicazioni.

Riferimenti bibliografici

[1] AA. VV., *Leonida Tonelli: in memoriam*, Università di Pisa, Arti Grafiche TORNAR, Pisa, 1952.

[2] R. Betti, S. Caparrini (a cura di), *Eulero*, Lettera Matematica Pristem, 66-67, Centro Eleusi - Università Bocconi, Springer-Verlag Italia, Milano, 2008.

[3] C.B. Boyer, *Storia della matematica*, Arnoldo Mondadori Editore, Milano, 1980.

[4] S. Campanato, *Sistemi ellittici in forma divergenza. Regolarità all'interno*, Quaderni Scuola Normale Superiore, Pisa, 1980.

[5] E. De Giorgi, *Sull'analiticità delle estremali degli integrali multipli*, Rend. Acc. Naz. Lincei, (8) 20-4 (1956), 438–441.

[6] E. De Giorgi, *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari*, Mem. Acc. Sci. Torino, (3) 3-I (1957), 25–43.

[7] E. De Giorgi, F. Colombini, L.C. Piccinini, *Frontiere orientate di misura minima e questioni collegate*, Quaderni Scuola Normale Superiore, Pisa, 1972.

[8] J. Douglas, *Solution of the problem of Plateau*, Trans. Amer. Math. Soc., 33 (1931), 263–321.

[9] M. Emmer (a cura di), *Matematica e cultura 2002*, Springer-Verlag Italia, Milano, 2002.

[10] L. Fattorusso, M. Marino, *A new contribution to the interior differentiability for nonlinear variational parabolic systems with nonlinearity* $q \geq 2$, J. Nonlinear Convex Analysis, 13-2 (2012), 257–271.

[11] G. Fichera, *La matematica italiana tra le due guerre mondiali*, Atti Acc. Gioenia Catania, 1988, anno CLXIV, 51–74.

[12] G. Fichera, *Tre battaglie perdute da tre grandi matematici italiani*, in "Atti del Convegno di studi in memoria di Giuseppe Geminiani", Modena, 20 maggio 1994, Collana di studi n. 11, Acc. Naz. Sci. Modena, Mucchi, Modena, 1995, 9–28.

[13] M. Giaquinta, *Hilbert e il calcolo delle variazioni*, in "Il pensiero di David Hilbert", C. Mammana (Editore), Le Matematiche, 55 (2000), 47–58.

[14] M. Giaquinta, S. Hildebrandt, *Calculus of variations*, Voll. I e II, Grund. math. Wiss., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006 e 2010.

[15] E. Giusti, *Analisi matematica 2*, Boringhieri, Torino, 1983.

[16] E. Giusti, *Metodi diretti nel calcolo delle variazioni*, Unione Matematica Italiana, Bologna, 1994.

[17] E. Giusti, *Il contributo di Ennio De Giorgi (1928-1996) al calcolo delle variazioni*, in "Per Ennio De Giorgi", Dip. Matematica Univ. Lecce, Liguori Editore, Napoli, 2000, 9–18.

[18] P. Hoffman, *L'uomo che amava solo i numeri*, Arnoldo Mondadori Editore, Milano, 1999.

[19] M. Kline, *Storia del pensiero matematico. Vol. I: Dall'antichità al Settecento*, Giulio Einaudi Editore, Torino, 2012.

[20] G. Loria, *Storia delle matematiche dall'alba della civiltà al secolo XIX*, Ulrico Hoepli Editore, Milano, 1950.

[21] G. Mammana, *Lezioni di analisi superiore: calcolo delle variazioni*, Circolo Mat. Catania Editore, Catania, 1939.

[22] M. Marino, A. Maugeri, *Differentiability of weak solutions of nonlinear parabolic systems with quadratic growth*, Le Matematiche, 50 (1995), 361–377.

[23] M. Marino, A. Maugeri, *Generalized Gagliardo-Nirenberg estimates and differentiability of the solutions to monotone nonlinear parabolic systems*, J. Glob. Optim., 40 (2008), 185–196.

[24] C.B. Morrey, *Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics*, Univ. of Calif. Publ. in Math (new ser.), 1943, 1–130.

[25] C.B. Morrey, *Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, (3) 14-1 (1960), 1–61.

[26] C.B. Morrey, *Multiple integrals in the calculus of variations*, Grund. math. Wiss. in Einzerdar. 130, Springer, Heidelberg, 1966.

[27] C.D. Pagani, S. Salsa, *Analisi matematica, vol. 2*, Masson, Milano, 1991.

[28] M. Picone, *Corso di analisi superiore. Fascicolo II: Calcolo delle variazioni*, Circolo Mat. Catania Editore, Catania, 1922.

[29] J. Plateau, *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, Tomi I e II, Gauthier-Villars, Paris, 1873.

[30] E.R. Reifenberg, *Solution of the Plateau problem for m-dimensional surfaces of varying topological type*, Acta Mathematica, 104 (1960), 1–92.

[31] G. Talenti, *Calcolo delle variazioni*, Quaderni Unione Matematica Italiana, 2, Pitagora Editrice, Bologna, 1977.

[32] L. Tonelli, *Fondamenti di calcolo delle variazioni*, Voll. I e II, N. Zanichelli, Bologna, 1921 e 1923.

[33] L. Tonelli, *Opere scelte. Vol. II: Calcolo delle variazioni*, a cura dell'Unione Matematica Italiana, Edizioni Cremonese, Roma, 1961.

[34] L. Tonelli, *Opere scelte. Vol. III: Calcolo delle variazioni*, a cura dell'Unione Matematica Italiana, Edizioni Cremonese, Roma, 1962.