Boll. Accademia Gioenia di Scienze Naturali - Catania

Anno di fondazione 1824

BOLLAG Vol. 46, N. 376 (2013)
Invited lecture , pp. IL 1 - IL 6
ISSN 0393-7143

Le leggi della natura †

D. D. Cattani[1] *, S. Cecchini[2]

[1] Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna, Italia
[2] INFN, Sezione di Bologna, Italia

Summary

In this article we point out the observations and the principles from which the modern Physics originates. Firstly the observations made by Galileo Galilei on board a ship, observations that allow us to define the Inertial Systems and the homogeneity and the isotropy of the space in such systems. After we show as the fundamental laws of the Mechanics may be derived thanks to the equations that the born in Turin mathematician Lagrange wrote applying the principle of determinism of motions stated by Isaac Newton. In the following we point out as, with the Least Action Principle put forward in 1834 by the Irish mathematician William Hamilton together with few simple observations about electric phenomena, it is possible to obtain the fundamental laws of the Electromagnetism. With regard to the Gravitation we highlight that the Newton's theory of Gravitation is not a fundamental theory, because the phenomenon of the gravitation is due to the deformation of the space caused by the masses in it contained as showed by the Einstein's General Theory of Relativity. In this paper therefore we have shown that the Laws of Nature may be correctly obtained with few simple observations of the natural phenomena combined with the learned mathematical instruments formulated by the mathematicians Euler, Lagrange and Hamilton.

Key words: *laws and natural principles, mechanics, elecromagnetism, relativity: special – general*

Riassunto

Si mettono in evidenza le osservazioni ed i principi da cui prende origine la Fisica moderna. In primo luogo le osservazioni fatte a bordo di una nave da Galileo Galilei, osservazioni che ci hanno permesso di definire i Sistemi inerziali e l'omogeneità e l'isotropia dello spazio in tali sistemi. Si mette poi in evidenza come le leggi fondamentali della meccanica possano essere derivate grazie alle equazioni che il matematico torinese Lagrange poté scrivere applicando il principio di determinismo dei moti formulato da Isaac Newton. Si mostra poi come, con il principio della Minima Azione formulato nel 1834 dal matematico irlandese William Hamilton unito a delle semplici osservazioni sui fenomeni elettrici, si possano ricavare le leggi fondamentali dell'elettromagnetismo. Per quanto riguarda poi la Gravitazione si mette in evidenza che la teoria di Newton non è una teoria fondamentale mentre lo è la deformazione dello spazio generata dalle masse in esso presenti, così come messo in evidenza nella teoria della Relatività Generale di Albert Einstein. Nel testo dell'articolo si è quindi mostrato che le Leggi della Natura possono essere ricavate abbinando a poche e semplici osservazioni dei fenomeni naturali i sapienti strumenti matematici elaborati dai

---

† Nota presentata dal socio A. Messina

* e-mail: daniele.cattani@bo.infn.it

matematici Eulero, Lagrange ed Hamilton.

Parole chiave: *leggi e principi naturali, meccanica, elettromagnetismo, relatività: ristretta – generale*

1 Introduzione

Sui nostri giornali si parla di tutto, anche troppo, ma della scienza si parla raramente. Magari in occasione di una scoperta o di una notizia di cronaca e lì ci si ferma. C'è quasi la paura di disturbare i lettori con argomenti tediosi.

Noi pensiamo che sarebbe ora di cambiare. Oltretutto l'Italia è ed è stata patria di tanti pensatori e scienziati e neanche dobbiamo dimenticare che quando in Campania ed in Sicilia si parlava greco, ivi vissero Parmenide e Zenone di Elea ed Archimede di Siracusa. Non dobbiamo quindi limitarci a parlare sempre di cose mondane, che certo sono divertenti, ma occorre anche non relegare la scienza nel dimenticatoio.

Come inizio vogliamo mostrare che gran parte della fisica classica si basa su fondamenta di facile comprensione. Realmente sia le leggi della Meccanica, sia la Relatività Ristretta, sia le leggi dell'elettromagnetismo si possono ottenere con delle semplici osservazioni, pochi principi fondamentali e un corretto uso della matematica.

2 Da Galileo e Newton a Einstein: la meccanica

Cominciamo con le osservazioni. Galileo Galilei, nel Dialogo sui Massimi Sistemi (1), finge di trovarsi "*sotto coverta di alcun gran navilio*". Se fosse vissuto oggi avrebbe detto a bordo di un aereo o in treno, ma all'epoca i treni non c'erano. E lì osserva mosche e farfalle che volano, pesciolini in un acquario, gocce che cadono dall'alto; inoltre suppone che qualcuno salti a piedi giunti in qualsivoglia direzione oppure che lanci oggetti a qualche compagno. Sia che la nave sia ferma sia che si muova col mare calmo nulla cambia. Tiene anche a precisare che lanciando oggetti al compagno non deve usare maggiore gagliardia se il compagno si trova verso prua che verso poppa. In queste osservazioni ci sono i fondamenti della fisica moderna. Qui si definisce il cosiddetto "*Sistema inerziale*" che può essere sia il sistema di riferimento della nave ferma, sia qualsiasi altro sistema che si muova di moto rettilineo uniforme rispetto al primo, oppure sia in quiete.

Un'altra importante osservazione è che nulla cambia passando da un punto all'altro della sala del "*gran navilio*": ogni punto è equivalente. Lo spazio è quindi *omogeneo*. Dalla osservazione sui lanci degli oggetti si deduce anche che lo spazio è *isotropo* ovvero tutte le direzioni sono equivalenti.

Per capire meglio la sostanza di queste due proprietà si può pensare di trovarsi su una piattaforma rotante tipo quella delle giostre dei bambini: allontanandosi dal centro di rotazione si avverte subito la diversità dei diversi punti. Qui lo spazio non è né omogeneo, né isotropo. Possiamo quindi dire che la giostra non è un sistema inerziale, mentre lo è un treno che proceda velocemente in un tratto rettilineo.

Altra osservazione che possiamo fare nel nostro sistema inerziale è quella di considerare due oggetti in moto rettilineo uniforme con differenti velocità e diverse direzioni. Si può facilmente notare che a percorsi uguali del primo oggetto corrispondono percorsi uguali del secondo oggetto che si muove ad una differente velocità. Poiché le velocità sono relazioni fra lo spazio ed il tempo si può affermare che *il tempo scorre uniformemente* in ogni punto del sistema di riferimento.

Ma le deduzioni non finiscono qui. Dalle osservazioni fatte si può pure formulare un principio generale il cui enunciato è: *le leggi della Natura sono le stesse in ogni sistema inerziale di riferimento*. Albert Einstein comprese che fra le leggi della Natura c'era anche la costanza della velocità con cui si propaga la luce (2), velocità che per altro negli ultimi decenni dell'Ottocento era stata misurata in modo tale da poterne mettere in evidenza la diversità se misurata nella direzione dei moti della Terra o trasversalmente a tali moti. Quindi anche la luce e le onde elettromagnetiche, in generale, hanno la stessa velocità in ogni sistema inerziale indipendentemente dalla direzione di propagazione.

Un altro importante passo per la formulazione delle leggi della Meccanica è stato fatto da Isaac Newton, lo scienziato inglese nato nell'anno della morte di Galileo. Newton, considerando i moti di insiemi di punti materiali, si accorse che il loro moto poteva essere completamente determinato se ad un dato istante si conoscono esattamente le posizioni e le velocità di ogni punto materiale (3). È il cosiddetto *principio di determinismo* di Newton che ha avuto un'enorme importanza per la formulazione delle leggi della Meccanica.

Un altro italiano nato non a Pisa, ma a Torino, compie un significativo passo per la formulazione delle leggi della Meccanica, Giuseppe Luigi Lagrange, matematico di Federico il Grande di Prussia e quindi, alla sua morte, matematico di Luigi XVI a Parigi, con dimora nel Palazzo del Louvre. Nel 1788 Lagrange pubblica a Parigi, "La Mécanique analytique" (4) in cui mostra, applicando il principio di determinismo, che per ogni insieme di punti materiali si può scrivere per tutti i punti dell'insieme una funzione delle posizioni e delle velocità, funzione che oggi chiamiamo "*lagrangiana del sistema*". Un insieme di equazioni, dette *equazioni di Lagrange*, poi ci permette di determinare il moto dell'insieme di punti materiali.

Infine, l'ultimo passo necessario per la costruzione della fisica moderna è il *principio di Hamilton* (5), ma ne parleremo più avanti dopo aver visto quanto si può ricavare da quello che abbiamo già detto.

Cominciamo con le leggi fondamentali della Meccanica (6). Consideriamo una particella materiale *libera*, cioè non soggetta ad alcuna forza. Per la omogeneità dello spazio e del tempo la sua lagrangiana non potrà dipendere né dalle sue coordinate né dal tempo, e quindi, essendo lo spazio isotropo, potrà dipendere solo dal modulo della sua velocità. L'applicazione delle equazioni di Lagrange a una tale lagrangiana ci dice che in questo caso la velocità del nostra particella materiale non può variare. È questa la legge di inerzia che è diretta conseguenza della omogeneità e isotropia dello spazio e della omogeneità e uniformità dello scorrere del tempo.

Dalla omogeneità dello spazio le equazioni di Lagrange ci danno anche *la legge di conservazione della quantità di moto* dei punti del sistema, dove la quantità di moto è data dal prodotto della massa del punto materiale per la sua velocità. Ad esempio se uno da fermo spara una fucilata, prima dello sparo sia il fucile sia il proiettile hanno quantità di moto zero. Quando il proiettile esce dalla canna con la sua quantità di moto, il fucile, affinché la quantità di moto totale resti zero, dovrà rinculare con la stessa quantità di moto del proiettile ma di segno opposto. Ovviamente, essendo la massa del fucile molto maggiore di quella del proiettile, sarà bassa la velocità del rinculo.

Dalla isotropia dello spazio, le equazioni di Lagrange ci danno inoltre *la legge di conservazione del momento della quantità di moto*. È la legge che spiega perché la ballerina che piroletta sul ghiaccio a braccia spalancate quando chiude le braccia gira con maggiore velocità.

Dalla omogeneità ed uniformità dello scorrere del tempo segue anche il *principio di conservazione dell'energia*. Infatti la lagrangiana di un sistema chiuso non può dipendere esplicitamente dal tempo e quindi deve essere una funzione solo delle posizioni e delle velocità dei punti materiali. Dalle equazioni di Lagrange segue allora che è definibile l'energia del sistema chiuso, energia che non varia nel tempo. La conservazione dell'energia la vediamo ad esempio nel caso del pendolo: nel punto più basso dell'oscillazione l'energia è tutta cinetica, fermo, nel punto più alto, l'energia è tutta gravitazionale ed uguale all'energia cinetica che aveva nel punto più basso.

Giunti a questo punto possiamo anche aggiungere che dalle proprietà ora esaminate dello spazio e del tempo seguono anche le trasformazioni di Lorentz che ci permettono di calcolare come variano il tempo e le coordinate spaziali nel passaggio da un sistema inerziale ad un altro sistema inerziale, trasformazioni che sono alla base della teoria della relatività ristretta di Einstein (7).

Ma torniamo ora all'ultimo passo necessario alla costruzione della fisica moderna, cioè al *prin-*

cipio della minima azione formulato dal matematico irlandese Hamilton nel 1834. Tale principio nasce dalle osservazioni del francese Fermat sulla propagazione della luce nei mezzi trasparenti ed anche da altre osservazioni sul moto fatte dai francesi D'Alembert (8) e Maupertuis (9).

Per formulare il suo principio il matematico Hamilton creò un *funzionale*[1] detto "*Azione lagrangiana*" che consiste nell'integrale nel tempo della lagrangiana del sistema, dall'istante iniziale a quello finale, e ha dimostrato che l'evoluzione nel tempo di ogni sistema materiale è quella che, essendo fissi i valori della lagrangiana all'istante iniziale e a quello finale, rende minimo l'integrale della Azione lagrangiana.

Qui certo entra pesantemente in gioco la matematica perché per potere usare tale principio occorre un particolare strumento di calcolo, il calcolo delle variazioni dei funzionali, strumento che era già stato creato nel secolo precedente dal matematico svizzero Eulero.

Un primo risultato di questo principio è che la sua applicazione a una qualsiasi lagrangiana, dà immediatamente le equazioni di Lagrange e quindi tali equazioni soddisfano il principio di minima azione. Con il principio di Hamilton si possono ricavare anche le equazioni che governano i fenomeni elettromagnetici ovvero le equazioni di Maxwell.

3 Maxwell e l'elettromagnetismo

È sufficiente ritenere che esistano le cariche elettriche (la scoperta si deve agli antichi greci che strofinando dell'ambra si accorsero della loro presenza e delle forze che esercitavano su oggetti vicini), considerare il tipo di forze cui le cariche sono soggette e *trovare il modo di descrivere le osservazioni*, il tutto aiutandoci con esperimenti di tipo qualitativo. Anche qui però entra pesantemente in gioco la matematica.

Per potere descrivere le forze elettriche che non dipendono solo dalla posizione delle cariche ma anche dalla loro velocità occorre introdurre un nuovo tipo di calcolo: il calcolo tensoriale. A questo punto però mi limiterò a parlare solo in via generale.

L'applicazione del principio della minima azione al moto di una carica elettrica in presenza di altre cariche ferme o in movimento ci porta a definire una grandezza tensoriale: il campo elettromagnetico, composto da due componenti fondamentali, che sono il campo elettrico e il campo magnetico. Si trova così l'equazione del moto della carica, mentre la *sola* definizione del tensore del campo contiene in sé le prime due equazioni di Maxwell (10) !

Arrivati a questo punto occorre trovare come le cariche e le correnti generino i campi. Occorre cioè trovare quella che è detta la seconda coppia delle equazioni di Maxwell. Anche qui si procede con il principio della minima azione ed il modo in cui si procede mette di nuovo in luce quelli che sono i limiti della teoria di Maxwell. Per trovare la prima coppia di equazioni si è cercata l'interazione di una carica (considerata come carica di prova) con tutte le altre cariche che generano i campi di forze e non si è ritenuto che la carica di prova potesse perturbare il moto di tutte le altre cariche. Abbiamo perciò imposto l'ipotesi non perturbativa. Nel passo successivo si va a studiare come le cariche fisse o in moto generano i campi senza che questi, a loro volta, perturbino il moto delle cariche. Dal punto di vista matematico significa che la variazione dell'integrale dell'azione deve essere fatta in modo da non variare il moto delle cariche.

Ancora nell'azione lagrangiana dovranno entrare anche i campi cioè il tensore del campo elettromagnetico da solo senza alcuna interazione con le cariche e in un modo che non dipenda dal sistema di riferimento, ovvero in una forma invariante. Inoltre se si vuole ottenere una teoria lineare, cioè tale che i campi creati dalle varie cariche si sommino semplicemente, dovremo fare in modo che nelle equazioni risultanti i campi appaiano alla prima potenza. Poiché per variare l'azione occorre derivarla, i campi vi dovranno apparire alla seconda potenza ovvero in una forma quadratica invariante. Per uniformarsi poi alle unità di misura storiche questo invariante dovrà essere moltiplicato per una opportuna costante e perché possa poi essere minimizzato questa costante

[1] Molto brevemente: una variabile funzionale o "funzionale" è un'applicazione che trasforma una funzione differenziale in un numero reale.

viene presa di segno negativo. Fatto tutto questo, cioè costruita l'azione con una parte descrivente l'interazione campi – cariche ed un'altra parte descrivente i campi, variando solo i campi, essendo cioè fissato il moto delle cariche, si ottiene l'equazione tensoriale che ci dice come cariche e correnti generino i campi. In termini di campo elettrico e magnetico questa equazione tensoriale esprime la seconda coppia delle equazioni di Maxwell.

Al termine di questa lunga chiacchierata sulle leggi della Natura e su come possano essere ricavate con la matematica, vogliamo ritornare su un punto: i limiti della teoria di Maxwell. Ne abbiamo visto le cause: la linearità delle sue equazioni e l'ipotesi non perturbativa. Ci sono tante situazioni in cui queste ipotesi restrittive non danno effetti rilevanti, stante che usualmente le correnti sono confinate entro fili rigidi, ma c'è una situazione in cui questi limiti ci impediscono di trovare risultati utili.

È la fisica del plasma (con la parola plasma si intende un gas completamente ionizzato ma elettricamente neutro entro certi volumi). Per ottenere la fusione termonucleare si deve confinare con un campo magnetico un gas completamente ionizzato ad altissima temperatura, quindi non una sola carichetta di prova ma un enorme numero di cariche elettriche. Chiaramente in questo caso l'ipotesi non perturbativa non regge ed il risultato è che nessuno è mai riuscito a confinare un plasma di sufficiente densità per un tempo abbastanza lungo.

4 Einstein e la Relatività Generale

A questo punto il lettore si chiederà perché abbiamo parlato della Meccanica e dell'Elettromagnetismo ma abbiamo tralasciato la Gravitazione? Il lettore non ce ne voglia, ma c'è una ragione: malgrado la teoria di Newton della gravitazione universale abbia dato degli ottimi risultati per il calcolo delle orbite dei pianeti nell'arco di migliaia di anni (attenzione abbiamo detto migliaia, non milioni di anni), tale teoria che assume l'istantaneità dell'interazione fra masse gravitazionali viola i dettami della teoria della relatività ristretta.

Il fenomeno della gravitazione non appartiene allo spazio omogeneo ed isotropo in cui abbiamo costruito la meccanica e l'elettromagnetismo. Ce lo hanno dimostrato la teoria di Einstein della Relatività Generale e le recenti osservazioni astronomiche (Fig. 1).

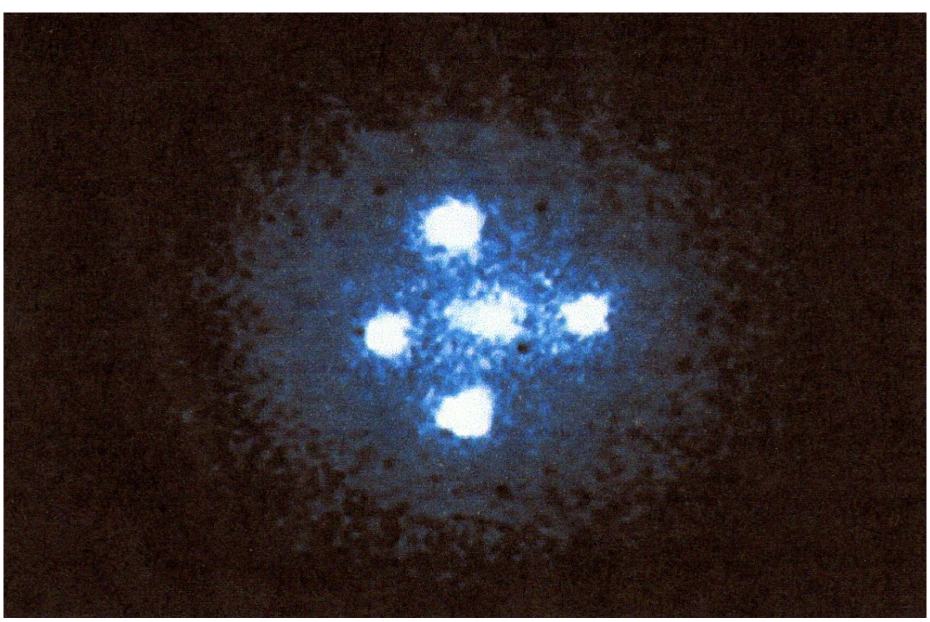

Figura 1: Al centro dell'immagine, conosciuta come Croce di Einstein, è la galassia ZW2237+030 distante dalla Terra 400 milioni di anni luce; il Quasar G2237+0305, collocato dietro di essa a 8 miliardi di anni luce, ci appare quadruplicato a causa della deformazione dello spazio creata dalla galassia (foto NASA).

Secondo Einstein le masse con la loro presenza modificano le proprietà metriche dello spazio il quale cessa di essere omogeneo ed isotropo. E il moto sia dei corpi materiali sia della luce avviene lungo le geodetiche, che sono le linee di minimo percorso di questo spazio. Avviene così che il moto libero della mela che si stacca dall'albero sia la caduta al suolo lungo la verticale, che è la sua geodetica. Avviene anche che la luce delle stelle distanti che ci arriva passando in prossimità del Sole senta la curvatura dello spazio creata dalla massa del Sole per cui noi le osserviamo spostate rispetto alla posizione che hanno usualmente. E avviene pure, come visto nella Fig. 1, che la luce di un oggetto stellare posto dietro ad una grande galassia sia da noi visto con quattro immagini!

Riferimenti bibliografici

[1] Galilei G. 1968, *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, Ed. Naz. Firenze Vol. VII, 212

[2] Einstein A. 1905, *On the electromagnetics of moving bodies*, Annalen der Physik, 17, 891

[3] Newton I. 1997, *Principi matematici della filosofia naturale*, in Classici della Scienza, UTET, Torino)

[4] Lagrange G. L. 2009, *Mecanique Analytique*, Cambridge Univ. Press, London

[5] Hamilton W. R. 1834, *On a General Method in Dynamics*, Phil. Trans. R. Soc. London, 124, 247

[6] Landau L. D., Lifshitz E. M. 1976, *Corso di Fisica Teorica: Meccanica*, Editori Riuniti, Roma

[7] Landau L. D., Lifshitz E. M. 1999, *Corso di Fisica Teorica: Teoria dei Campi*, Editori Riuniti, Roma

[8] Le Rond d'Alembert J. B. 1921, *Traité de dynamique*, Gauthier – Villars, Parigi

[9] Moreau de Maupertuis P. L. 1746, *Les loix du mouvement et du repos deduites d'un principe metaphysique*, Histoire Acad. Royale des Sci. et Belles Lettres, 267

[10] Jackson J. D. 1975, *Classical Electrodynamics*, John Wiley, NY